

# Docencia e investigación en educación superior

## CAPÍTULO

# 5



DOI: <https://doi.org/10.53595/eip.010.2023.ch.5>

**La Yupana o ábaco peruano y el  
aprendizaje de la matemática: de lo  
concreto a lo abstracto, de la escuela  
a la universidad**

**Henry-Mark Vilca-Apaza**

**Fredy Sosa Gutierrez**

**William Walker Mamani Apaza**



**EIP** EDITORIAL  
IDICAP  
PACÍFICO

# La Yupana o ábaco peruano y el aprendizaje de la matemática: de lo concreto a lo abstracto, de la escuela a la universidad

**Henry-Mark Vilca-Apaza**

Universidad Nacional del Altiplano

<https://orcid.org/0000-0001-6982-7645>

[hvilca@unap.edu.pe](mailto:hvilca@unap.edu.pe)



Licenciado en Educación Primaria. Magister en gestión del desarrollo con identidad. Doctor en ciencias de la educación. Docente de la Facultad de Ciencias de la Educación y de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Altiplano.

**Fredy Sosa Gutierrez**

Universidad Nacional del Altiplano

<https://orcid.org/0000-0001-6473-3877>

[fredysosa@unap.edu.pe](mailto:fredysosa@unap.edu.pe)



Licenciado en Educación Primaria. Especialista en Educación Intercultural, pedagogía, educación universitaria. Magíster Scientiae en Educación Intercultural. Doctor en educación. Docente de la Facultad de Ciencias de la Educación y de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Altiplano.

**William Walker Mamani Apaza**

Universidad Nacional del Altiplano

<https://orcid.org/0000-0003-3313-0998>

[wwmamani@unap.edu.pe](mailto:wwmamani@unap.edu.pe)



Licenciado en Educación Secundaria: Lengua, literatura, psicología y filosofía. Magister Scientiae en Administración de la Educación. Docente de la Facultad de Ciencias de la Educación y de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Altiplano.

# **La Yupana o ábaco peruano y el aprendizaje de la matemática: de lo concreto a lo abstracto, de la escuela a la universidad**

## **The Yupana or Peruvian abacus and the learning of mathematics: from the concrete to the abstract, from school to university**

**Henry-Mark Vilca-Apaza**  
**Fredy Sosa Gutierrez**  
**William Walker Mamani Apaza**

### **Resumen**

Desde el hallazgo de El primer nueva corónica y buen gobierno de Guamán Poma de Ayala en 1908 y la publicación gráfica de la yupana en 1912 en las actas del Congreso de Americanistas de Londres, esta herramienta de cálculo inca ha sido motivo de estudios científicos acerca de su funcionamiento. A partir de ello, se han desarrollado modelos y experiencias de aplicación en educación matemática. En ese marco, el presente estudio tuvo por objetivo analizar los avances en cuanto a las investigaciones y propuestas desarrolladas en el campo de la educación matemática con el propósito de visibilizar nuevas posibilidades de investigación referente a temas y modelos aún no explorados. El método de abordaje fue el cualitativo, con la técnica de la revisión documental de tesis, artículos científicos, textos académicos y tesinas producidos a nivel de América Latina. Los resultados muestran que es harto estudiado los efectos de la yupana en el aprendizaje de las operaciones básicas (adición, sustracción, división y multiplicación); sin embargo, y es lo que el estudio visibiliza, la yupana tiene múltiples potencialidades aún desconocidas, sugiriéndose, investigar la eficacia del ábaco inca en el aprendizaje de números decimales, radicales, enteros, fraccionarios, matrices, logaritmos y vectores; así como investigar la eficacia de los modelos innovadores de yupana desarrollados (manuales como digitales), no sólo en el nivel primario, sino también inicial y secundario, y superior. Implementar e investigar el uso de la yupana con el método Radicati a fin de favorecer el desarrollo del pensamiento formal.

**Palabras clave** Yupana, ábaco peruano, aprendizaje, material didáctico, etnomatemática.

### **Abstract**

Since the discovery of El primer nueva corónica y buen gobierno by Guamán Poma de Ayala in 1908 and the graphic publication of the yupana in 1912 in the proceedings of the Congress of Americanists in London, this Inca calculation tool has been the subject of scientific studies about its operation. From this, models and experiences of application in mathematics education have been developed. Within this framework, the present study had the objective of analyzing the advances in terms of research and proposals developed in the field of mathematics education with the purpose of making visible new research possibilities regarding topics and models not yet explored. The approach method was qualitative, with the technique of documentary review of theses, scientific articles, academic texts and dissertations produced at the Latin American level. The results show that the effects of the yupana in the learning of basic operations (addition, subtraction, division and multiplication) have been extensively studied;

However, and this is what the study makes visible, the yupana has multiple potentialities still unknown, suggesting to investigate the effectiveness of the Inca abacus in learning decimal numbers, radicals, integers, fractions, matrices, logarithms and vectors; as well as to investigate the effectiveness of the innovative models of yupana developed (manual and digital), not only at the primary level, but also initial and secondary, and higher. Implement and investigate the use of the yupana with the Radicati method in order to favor the development of formal thought.

**Keywords** Yupana, Peruvian abacus, learning, didactic material, ethnomathematics.

## Introducción

### La yupana, el ábaco o computador inca: los primeros hallazgos

Los ábacos, del latín *abācus*, instrumentos usados para realizar operaciones elementales de aritmética (RAE, 2021), se desarrollaron en diversas culturas del mundo. En China se denominó Suan Pan; en Japón, Soroban; en Corea, Tschu Pan; en Rusia, Stchoty; en Vietnam, Ban Tuan; en Turquía, Coulba; en Alemania, Choreb (Micelli y Crespo, 2012). Los mayas idearon el Nepohualtintzin, y los incas, cuyo territorio se extendía desde Chile y Argentina hasta el río Mayo-Colombia (Pareja, 1986), la Yupana, aunque hay evidencia de su existencia antes de la administración inca (Moscovich, 2006). Ha recibido diversos nombres: quipu de grano de maíz (Acosta, 1590), ábaco peruano, pizarra inca, computador incaico, tabla inca, calculadora prehispana. Leonard & Shakiban (2010), se equivocan al relacionarla con la lengua aymara, pues el término fue acuñado por W. Burns (Narvaez, 2014) tomando el vocablo quechua *yupay*, que significa ‘contar’ o ‘lo que sirve para contar’ o ‘hacer cuentas’. Provendría también del término *yupani*, que significa ‘contar y hacer cuentas’ (González, 1952[1608]) o ‘empadronar’ (Moscovich, 2006), o de *Yupanqui*, traducido como ‘contarás’ o ‘aficionado a calcular’ (Chirinos, 2010).


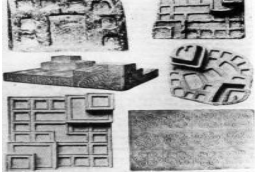
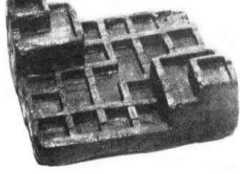

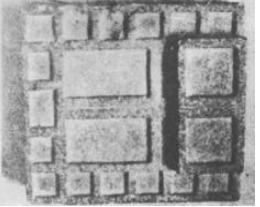

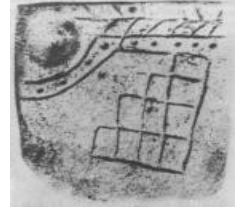





Es importante anotar el significado de la palabra *yupana* en lengua aymara. Para Chambi (2003), la palabra Yupana proviene del aymara: *yupa* que significa ‘el que empalma’ o ‘el que enlaza algo con otro’ y *-na*, un sufijo que significa ‘en el lugar de’ o ‘en el sitio de’.

Con la conquista hispana y la consecuente muerte de los *amautas*, murió el caudal de conocimientos precolombinos. El europeo, a su llegada a América, hizo encubrir más que descubrir (Pareja, 1986). Un Concilio limeño en 1582 dispuso quemar la totalidad de quipus que se incautaran por ser una ‘obra demoníaca’ (Orellana, 2005). Lo que sabe hoy acerca de la yupana es gracias a las fuentes de los cronistas de la Colonia y a los hallazgos arqueológicos. En 1869, en Ecuador, se halló la *yupana de madera de Chordeleg*, probablemente usado para establecer impuestos en el incanato (Radicati, 1951; Carrillo, 2020) (Fig.1.a). En este país, se hallaron también las yupanas de piedra en Azuay; la *yupana de piedra con rayas de Huancarcuchu* por Max Uhle en 1922 (Micelli y Crespo, 2012), de diez casilleros dibujados y escalonados (Fig. 1.g); y la "*taptana o el ajedrez de Atahuallpa*" expuesta en 1957 por Olaf Holm (Radicati, 1951).

En Perú, se hallaron las yupanas de piedra en Caraz por Wiener en 1878 (Fig. 1-b.1); la yupana de planta ovalada en Pallasca (Fig. 1.b.4); los tableros decorados con figuras (Fig. 1.b), la yupana de madera del complejo arqueológico de Chan Chan - Trujillo, similar a la de Chordeleg, dada a conocer por Zikowitz en 1967 (Fig. 1.c); la yupana de piedra del Callejón de Huaylas (Fig. 1.e), de casilleros cuadrados y rectangulares, distribuidos simétricamente al eje, expuesta en 1931 por Nordenskiöld (Fig. 1.k); las yupanas de arcilla y de hueso de Cachalote de Ica (Fig. 1.f), empleado en

la construcción de techos de tumbas según J.C. Tello (1959) (Radicati, 1951); la yupana plataforma de barro fijada al suelo del complejo arqueológico de Huacones-Cañete, con 20 cuadrículas de 8 hoyos cada una (Tord, 2019) (Fig. 1.i); la yupana en la vasija Moche (Fig. 1.h), con casilleros de 5x4, presentada por Engl en 1967 (Radicati, 1951), erróneamente sindicado a los incas por (Micelli y Crespo, 2012). Hyat Verril en Viejas civilizaciones del nuevo mundo menciona la yupana de madera tipo bandeja con 10 compartimentos, donde 10 piedrecillas de un casillero equivalían a 100, cuyo cálculo consistía en quitar y colocar piedrecillas (Orellana, 2005).

El procedimiento de empleo, de estas yupanas, es aún un reto para la ciencia. Además de motivos rituales, se tejieron tres hipótesis sobre su finalidad: maquetas arquitectónicas o conjuntos urbanísticos, instrumentos de contabilidad y cálculo, y taptanas o tableros de juegos de azar (Radicati, 1951; Moscovich, 2006), como del juego ancestral phiskay. La primera teoría está respaldada por Chordeleg que presenta torreones de recintos cuadrados (Apaza, 2017), sin sostenibilidad, pues no existen ruinas arqueológicas de viviendas con tal diseño. Respecto al tercer postulado, según Max Uhle (1922), se requiere más estudios. La hipótesis más aceptada, es que son tableros de conteo. Wiener (1878-79), recogió relatos de los pobladores de Huamachuco que en ellas fueron registradas, por medio de granos, las contribuciones, y que ‘un grano en una división indicaba un valor que podía ser el décuplo o el céntuplo de aquel de otra división’ (Radicati, 1979), pero no fueron suficientes para desentrañar su uso.

			
a. Yupana de Chordeleg – Ecuador (1869).	b. Caraz – Perú (1878) (Ríos, 2013)	c. Yupana de Chan Chan, Perú (1967)	d. Taptana Montaluisa (1988).
			
e. Yupana de piedra -Callejón de Huaylas, Perú.	f. Yupana de arcilla y de hueso, Ica-Perú.	g. Yupana de Huancarcuchu - Ecuador (1922).	h. Yupana en Vasija moche, Lima- Perú.
			
i. Yupana de Huacones, Cañete-Perú.	j. Yupana en museo de Raccolte extraeuropee del Castello Sforzesco - Milán	k. Yupana rectangular (Museo Arqueología del Perú - Daniel Gannoni.	l. Yupana de Guamán Poma de Ayala (1615, pág. 360)

**Figura 1**  
Yupanas arqueológicas y etnológicas



## Teorías interpretativas sobre el método de uso de la yupana de Guamán Poma

Sería el hallazgo en 1908, por Richard Pietchmann, en la Biblioteca Real de Copenhague de El Primer Nueva Corónica y Buen Gobierno (1615) del cronista Felipe Guamán Poma de Ayala (Varallanos, 1943), publicada a partir de 1912 en las actas del Congreso de Americanistas de Londres-Francia, que marcaría un hito en cuanto al conocimiento que se tiene sobre la yupana. El dibujo de la página 360, de un *kipukamayuaq* (contador mayor y tesorero) que lleva un *kipu* y al lado izquierdo inferior una yupana de cuatro filas por cinco columnas (Fig. 1-k) con círculos blancos y negros en las cantidades de 5-3-2-1 (de izquierda a derecha), permitió descifrar su método de funcionamiento. Hoy se sabe que esta yupana fue manipulada solo por los *kipukamayuaq* para llevar la contabilidad o calcular, del latín *calculus*, ‘piedrecilla’ (Mora y Valero, 2019; Pareja, 1986), cualquier cantidad de objetos, productos o personas que luego era registrada en el *kipu* (nudo) (Pacheco, 1999; Bousany, 2008; Fedriani y Tenorio, 2004).

El hallazgo de la yupana de Guamán Poma y los valiosos datos de la documentación colonial fueron fundamentales para develar el método de uso de la yupana. veamos algunos de ellos.

Guamán Poma de Ayala (1987 [1615]) en “*Primer nueva crónica y buen gobierno*” no dejó mayor detalle de cómo operar la Yupana, salvo el siguiente que resulta insuficiente para descifrarlo:

CONTADOR I TEZORERO Contador mayor de todo este rreyno, Condor Chaua, hijo de apo (...). Dize que este prencipal tenía grande auilidad; para sauer su auilidad el Ynga mandó contar y numirar, ajustar con los yndios deste rreyno. (...) enparexaua con una comida llamado quinua [gramínea de altura], contaue la quinua y los yndios. Fue muy grande su auilidad, mejor fuera en papel y tinta(...). Cuentan en tablas, numeran de cien mil, y de diez mil, y de ciento, y de diez, hasta llegar a una, de todo lo que pasa en este reino lo asienta, y fiestas y domingos, y meses, y años, y en cada ciudad y villa, y pueblos de [hombres/andinos] había estos dichos contadores y tesoreros en este reino (Guaman Poma, 1987 [1615], p. 361).

Entre la documentación colonial que fue fundamental para develar el método de uso de este instrumento matemático registrado por Guamán Poma está, en primer lugar, y el que creemos que fue fundamental, el escrito “*Historia Natural y Moral de las Indias*” de José de Acosta (2008[1590]) que refiere:

...pues verles otra suerte de quipos, que usan de granos de maíz, es cosa que encanta; porque una cuenta muy embarazosa, en que tendrá un muy buen contador que hacer por pluma y tinta, para ver a como les cabe entre tantos, tanto de contribución, sacando tanto de acullá y añadiendo tanto de acá, con otras cien retartalillas, tomarán estos indios sus granos y pondrán uno aquí, tres acullá, ocho no sé dónde; pasaran un grano de aquí; trocarán tres de acullá, y en efecto, ellos salen con su cuenta hecha puntualísimamente, sin errar tilde (...). Si esto no es ingenio y si estos hombres son bestias, júzguelo quien quisiere, que lo que yo juzgo de cierto es que, en aquello que se aplican, nos hacen grandes ventajas (Acosta, Libro Sexto, Cap. VIII, p. 211).

También “*Los Comentarios reales de los incas*” del Inca Garcilaso de la Vega (1959[1609]):

...los contadores o escribanos que tenían los nudos y cuentas de los tributos y delante del curaca y del gobernador Inca hacían las cuentas y particiones por los nudos de sus hilos y con piedrezuelas, conforme al número de los vecinos de la tal provincia, y las sacaban tan ajustadas y verdaderas, que en esta parte yo no sé a quién se pueda atribuir

mayor alabanza, si a los contadores, que, sin cifras de guarismos, hacían sus cuentas y particiones ajustadas de cosas tan menudas, cosa que nuestros aritméticos suelen hacer con mucha dificultad, o al gobernador y ministros regios, que con tanta facilidad entendían la cuenta y razón que de todas ellas les daban (Garcilaso de la Vega, Tomo I, Libro quinto, capítulo XVI, 1991 [1609], p. 245).

Luego la “*Historia del Reino de Quito de la América Meridional*” de Juan Velasco y Pérez Petroche (1989 [1841]):

...el instrumento usado para estos menesteres era algo así como unos depósitos hechos de madera, de piedra o de barro, con diversas separaciones, en las cuales se colocaban piedrecillas de distintos tamaños, colores y figuras angulares, porque eran excelentes lapidarios. Con las diversas combinaciones de ellas, perpetuaban los hechos y formaban cuenta de todo (Velasco, 1841-44, T-II:7).

Estos registros, incluido el *Vocabulario de la lengua aimara* (1612), de L. Bertonio (1984 [1612]), que guarda terminología vinculada a la contabilidad indígena y señala que las piedras utilizadas en las cuentas tenían diferente uso según su coloración (Tord, 2019), no solo evidencian la habilidad mental y matemática inca, sino dieron pautas para desarrollar teorías interpretativas sobre el método de operación de la yupana que, por razones de espacio, se dan a conocer las más relevantes.

### Interpretación de Henry Wassén (1931)

Henry Wassén (1931), en *The Ancient Peruvian Abacus*, hizo el primer acercamiento al funcionamiento de la yupana gráfica de Guamán Poma, respetando su posición original (forma vertical). Los círculos blancos son los hoyos del tablero, y los negros, fichas de calcular. Las filas están organizadas en grupos de orden decimal, donde las unidades se ubican en la primera fila inferior; las decenas, en la segunda; las centenas, en la tercera; y las unidades de millar, en la cuarta. Los valores de las semillas dependen de su posición en la tabla y del casillero. Los casilleros de las filas asumen los valores de 5, 15, 30 y 30 (Radicati, 1979; Murillo, 2010; Cinzia, 2008). En el primer casillero, cada agujero tiene el valor de uno ( $1 \times 5 = 5$ ); en el segundo, tienen el valor de cinco ( $5 \times 3 = 15$ ), en el tercero cada uno a quince ( $15 \times 2 = 30$ ); y el último, treinta ( $30 \times 1 = 30$ ) (Fig. 2). Para representar una cantidad como 8 bastará hacer uso de la columna de A y B (Fig. 2); tres fichas en la columna A ( $3 \times 1 = 3$ ) y uno en la columna B ( $1 \times 5 = 5$ ), luego  $3 + 5 = 8$ . Si bien se puede resolver operaciones, el método es forzado y poco práctico, incompatible con el sistema de numeración decimal empleado en el kipu (Fedriani y Tenorio, 2004), y un recurso poco apropiado para la enseñanza de la numeración (Hernández, 2004). Al no ser sostenible, quedó desfasada; sin embargo, sirvió de base a otros estudios.

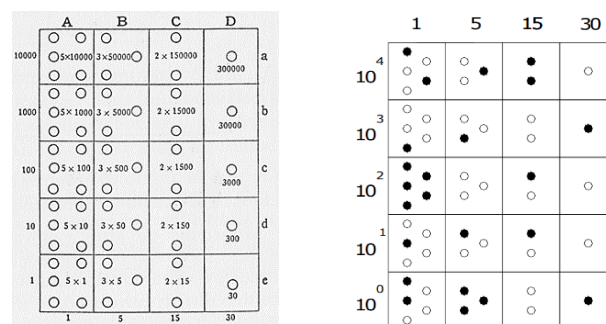


Figura 2

Tablero de la yupana de H. Wassén y representación numérica de 408 257 por Cinzia  
Nota I: Wassén (1931) en Leonard y Shakiban, 2011; D: Cinzia Florio, 2008.

### Interpretación de Carlos Radicati Di Primeglio (1951)

Radicati (1951), en *Introducción al estudio de los Quipus; El sistema Contable de los incas*, hizo una interpretación quizá la más próxima a como los incas la emplearon. Mantiene el tablero en su posición original y los casilleros no llevan grabado los círculos. Los valores se representan y conservan mentalmente, requiriéndose un trabajo nemotécnico, capacidad de abstracción y cálculo mental. Método que va de la mano con el estadio del pensamiento formal de J. Piaget. No parece que los incas hayan previsto las perforaciones en los casilleros, cada casilla de acuerdo a su posición servía para representar, con colocar una sola ficha, esos mismos números (Hernández, 2004). En este método, el tablero tiene los valores de 5-3-2-1, para todas las filas, a multiplicarse por las potencias de base 10 (Pacheco, 1999). Los valores en la primera fila (unidades) son  $5 \times 10^0 = 5$ ;  $3 \times 10^0 = 3$ ;  $2 \times 10^0 = 2$ ;  $1 \times 10^0 = 1$ ; en la segunda (decenas);  $5 \times 10^1 = 50$ ;  $3 \times 10^1 = 30$ ;  $2 \times 10^1 = 20$ ;  $1 \times 10^1 = 10$ , en la tercera (centenas),  $5 \times 10^2 = 500$ ;  $3 \times 10^2 = 300$ ;  $2 \times 10^2 = 200$ ;  $1 \times 10^2 = 100$ , en la cuarta (unidades de millar),  $5 \times 10^3$ ;  $3 \times 10^3$ ;  $2 \times 10^3$ ;  $1 \times 10^3$ , en la quinta fila (decenas de millar),  $5 \times 10^4$ ;  $3 \times 10^4$ ;  $2 \times 10^4$ ;  $1 \times 10^4$ . La ficha adquiere un valor dependiendo del casillero en el que se ubique. Por ejemplo, el número 20 se representa colocando una ficha en la casilla número '2' de la segunda fila (decenas).

**Adición.** En la adición  $18 + 22 + 47$ : “En la parte superior del tablero **a**) están los *sumandos* y dentro de él, por razones didácticas, se tiene las diferentes marcas que los representan, para el 18 se usó "o", para 22 “●” y para 47 "x". En **b**) se ha simplificado las fichas de valor 2 y 3 y convertido a 5 por ello aparecen tres fichas en la casilla '5'; en **c**) en la casilla del '10', tenemos ahora tres fichas y en la del '2' una ficha, luego su valor es de 5, eso implica que debemos colocar una ficha en la casilla del '5'; el tablero **d**) muestra que ya no hay más simplificaciones, siendo la respuesta (Pacheco, 1999). (Fig. 3).

**Multiplicación.** Para multiplicar  $7 \times 2$ , debe representarse el 7 dos veces en los casilleros correspondientes (Fig. 5). Luego, “el valor real de las fichas de la casilla 2 es 4, luego llevamos una ficha a la casilla del 3 y otra a la del 1; el valor real de las dos fichas de la casilla del 5, es 10 y lo llevamos la casilla del 10” (Pacheco, 1999).

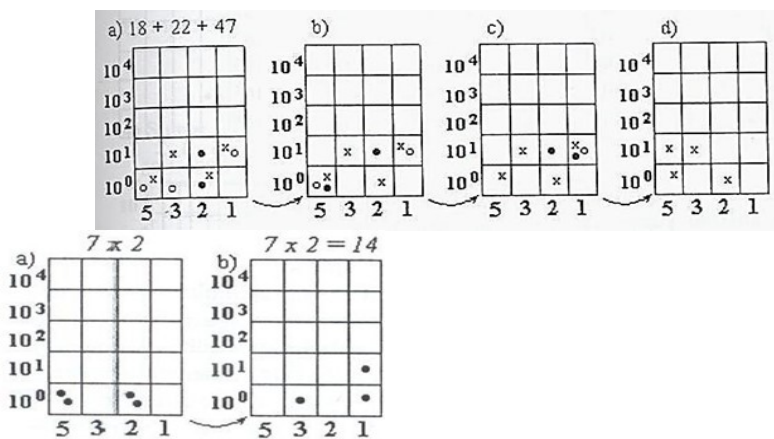


Figura 3

Izquierda: Adición en la yupana; derecha: Multiplicación por método Radicati

Nota. Pacheco, 1999.

### Interpretación de William Burns Glynn (1981)

Burns (1981), en *La tabla de cálculo de los incas*, desarrolló una teoría más sencilla y práctica. A diferencia de sus antecesores, revirtió la posición original, girándola 90° en sentido contrario a las agujas del reloj, dándole forma horizontal (Fig. 4). La columna en el extremo derecho representa a las unidades, la siguiente a la izquierda, a las



decenas, centenas, miles y diez miles. La cantidad y proporción de agujeros (5-3-2-1) se conservan en progresión ascendente vertical (de abajo hacia arriba). Los círculos de las tres primeras filas suman 10, suficiente para representar las cantidades en el sistema decimal (Hernández, 2004), como si fuera un Tablero de Valor Posicional. La casilla de un solo agujero es la ‘memoria’ y equivale a 10. Para representar los valores numéricos se emplea piedras o granos (Leonard & Shakiban, 2011; Pachas, 2016). El número 6971 se representa con cinco fichas en la casilla inferior y una en la segunda casilla de la columna de las UM; cinco fichas en la casilla inferior, tres en la segunda casilla y una ficha en la tercera casilla de la columna de las C; cinco fichas en la casilla inferior y dos en la segunda casilla de la columna de las D y, una ficha en la casilla inferior de la columna de las U. Cada ficha vale 1, no importa el casillero en el que esté. El cálculo resulta más objetivo que el método de Radicati, que resulta ser más abstracto.

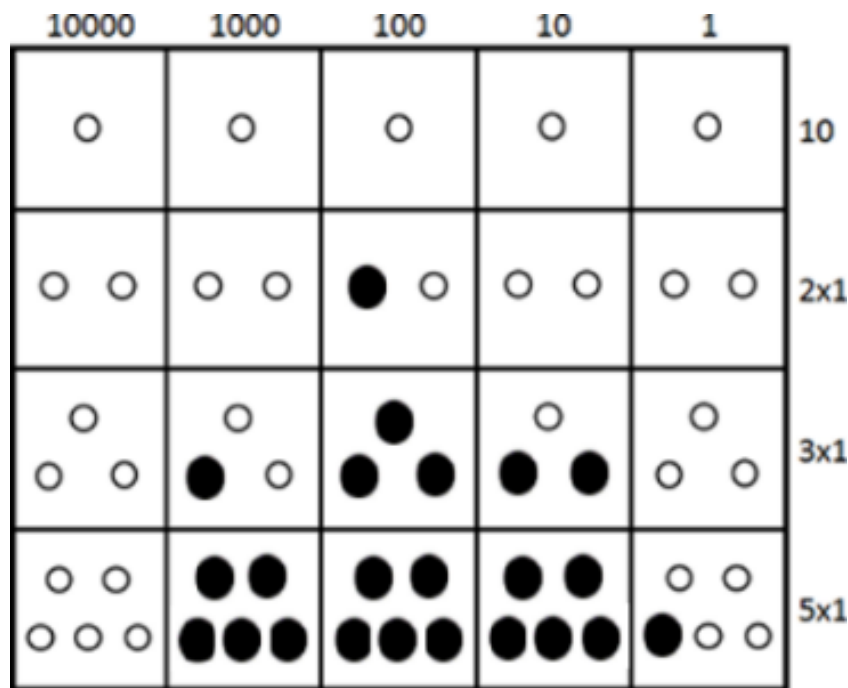


Figura 4  
Tablero de Burns y representación del número 6971

### Interpretación de Nicolino De Pasquale (2001)

En 2001, De Pasquale (Italia) hizo una interpretación, similar a la de Wassén, bajo el sistema de numeración cuadragésimo (Murillo, 2010), manteniendo la posición original de la yupana. En ella, cada círculo toma el valor de 5 en la primera columna ( $5 \times 5 = 25$ ), 3 en la segunda ( $3 \times 3 = 9$ ), 2 en la tercera ( $2 \times 2 = 4$ ) y 1 en la cuarta ( $1 \times 1 = 1$ ), haciendo una sumatoria en todas las filas de 39. Siendo así, un número como 100 se representaría de la siguiente forma:  $2 \times 1 \times 40^1 = 80 + 5 \times 2 \times 40^0 = 10 + 3 \times 3 \times 40^0 = 9 + 1 \times 1 \times 40^0 = 1$ , la sumatoria resulta 100 (Fig. 5). El problema de este método es que no está conforme a las características de las culturas americanas (Leonard y Shakiban, 2011). Si bien es funcional aún con problemas metodológicos, el sistema en base 40 no se conoce en el Ande, y es contrario al sistema decimal de los incas (Moscovich, 2007; Cinzia, 2008).

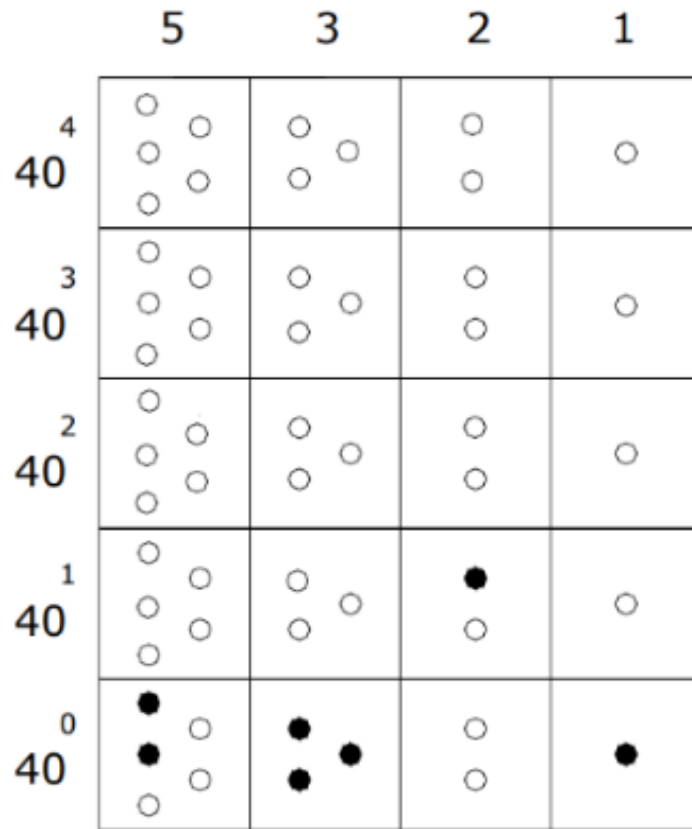


Figura 5

Yupana de base 40 representando al número 100, según De Pasquale

**Propuesta de Viviana Moscovich (2007)**

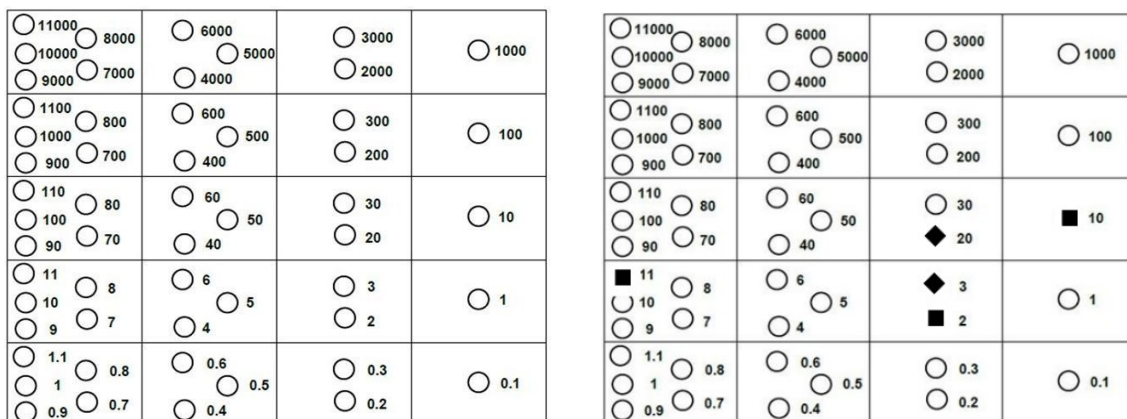
Moscovich (2007), en *Yupana*, tabla de contar inca: Estructura interna, desarrolló una técnica para la yupana de Guamán Poma, manteniéndola en horizontal, pero como una imagen ‘espejo’ (invertida). La secuencia de los valores de la yupana es 1-2-3-5, de izquierda a derecha, coincidente con la serie Fibonacci (sumar siempre los últimos dos resultados de la suma:  $0+1=1$ ;  $1+0=1$ ;  $1+1=2$ ;  $2+1=3$ ;  $3+2=5$ ;  $5+3=8$ , etc.), aunque para Cinzia (2008), esto es solo fascinación. El negro y el blanco, además de servir como hoyos, representan el principio andino de la complementariedad (*Hanan-Hurin*), aunque no explica cómo. Moscovich supone que la casilla ‘4’ fue omitida, por lo que la incorpora. El método emplea la ‘simplificación’ y ‘desimplificación’, basado en el método Radicati. En la operación combinada ( $10 \times 10 + 1000 + 20000$ ), siguiendo el ‘método 2’ de Moscovich, el grano de mayor talla (que multiplica la unidad por 10) está representado con “●” y el resto con “○”. La simplificación es a elección del contador. Primero se coloca 10 fichas en la casilla ‘10’ de la segunda columna (decenas) ( $10 \times 10 = 100$ ) que luego puede simplificarse por  $2 \times 50$ , sin embargo, se simplifica directamente con una ficha en la casilla ‘100’ de las centenas ( $1 \times 100 = 100$ ). El número 1000 se representa con 10 fichas en el casillero ‘100’ de los Millares, y el número 20000, con una ficha en el casillero ‘20000’ de las decenas de millar. Ver figura 6. Por simplificación se tiene 21 100.



9), se coloca el producto (suma de la columna de los subfactores). En la multiplicación  $211 \times 14 = 2954$  se emplea fichas negras (=1), blancas (=10), azules (=100) y rojas (=1000). En la columna ‘multiplicando’ se representa el número 211 (2 fichas azules=200, 1 ficha blanca=10 y 1 ficha negra=1), utilizándose 4 filas. El número 14 se descompone en sus subfactores  $1 \times 10$  y 4 ( $10 + 4 = 14$ ) y se crea dos columnas ‘multiplicadores’, ‘ $1 \times 10$ ’ y ‘4’. Luego, en la columna ‘ $1 \times 10$ ’ se multiplica el 211 por 10, tomando los valores de cada fila, es decir ‘diez veces’ cada ficha de la columna ‘1’, si el producto llega a las centenas o millares se debe emplear las fichas de color azul o rojo. Por ejemplo, en la cuarta fila, 1 ficha azul (100) multiplicado por 10 (columna de  $1 \times 10$ ) resultará 1000, debiendo representarse con la ficha roja. De la misma manera, en la columna del subfactor 4 se multiplicará  $211 \times 4$ , considerando los valores por fila. Por ejemplo, en la tercera fila, 1 ficha azul (100) multiplicado por 4 será 40, el mismo debe representarse con cuatro fichas azules. En la última columna se representa la suma de los resultados de la columna ‘ $1 \times 10$ ’ y ‘4’ por filas. La sumatoria de los valores de todas las fichas es el producto final.

**Interpretación de Andrés Chirinos Rivera (2010)**

Para Chirinos (2010), en *Quipus del Tahuantinsuyo. Curacas, Incas y su saber matemático en el siglo XVI*, la yupana es un tablero de once agujeros para realizar operaciones aritméticas en el sistema de numeración decimal. Este modelo, en la primera fila, de derecha a izquierda, cada círculo tiene valores de 0,1 a 1,1; la segunda fila de 1 a 11, la tercera de 10 a 110, la cuarta de 100 a 1100 y la quinta de 1000 a 11000. La estructura de la yupana, presenta ciertas regularidades de múltiplos de cinco, por ejemplo, en la segunda fila, la suma en vertical es: 30, 15, 10, 5, 5 y 1; la suma por cuadrículas es: 45, 15, 5 y 1; y la suma por mitades es 60 y 6, planteándose que los incas adoptaron un sistema sexagesimal (Zeballos, 2019), al igual que los sumerios. Para representar la cantidad siete, el tablero tiene un agujero específico, está ubicado en la posición siete contada desde izquierda-derecha y de abajo- arriba, es en esa posición donde se ubica la piedrecilla. También existe la posibilidad de descomponer en cinco y uno y uno (Apaza, 2017). Se puede representar los números de tres maneras: ‘acoplada’ (el número se representa solo tipo de cajas *pitu*), ‘desacoplada’ (el número se representa por casillas *pitu*) y ‘concreta’ (se representa con un máximo de cinco fichas del 1-9 en cada posición decimal). Representamos el número 23 con la primera y segunda formas utilizando “◆” “■”. (Fig. 8).



**Figura 8**

Interpretación de la yupana de Guamán Poma por Chirinos

Nota. Andrés Chirinos, 2010 y Vilchez, 2013.

Además de los expuestos, la yupana ha recibido el interés de otros estudiosos como M. Rostworowski (1981), Mediciones y Cómputos en el antiguo Perú; H. Pereyra Sánchez (1990), *La Yupana, complemento operacional del quipu*; P. Aitken-Soux y F. Ccama (1990), *Abaco andino*, instrumento andino ancestral de cómputo; J. Ansión (1990), *Cómo calculaban los Incas*; Mauricio Orlando (2002), *La Calculadora Atahualpa*; M. Orlando (2003), *Abaco Inca e Nuove Architetture di Calcolo*; P. Álvarez (2004), *Las 64 casillas*; C. Cabrejas (2004), *Descifran “calculadora” inca*; L. Laurencich & E. Rossi (2007), *La Yupana de la Nueva Corónica y las Yupanas de Exsul Inneritus Blas Valera Populo Suo*; J. Christie (2009), *Piedras talladas inka y yupanas: Una posible esencia compartida*; R. Cuba (2010), *La Yupana y los Quipus, instrumentos de cálculo en el imperio incaico*; M. Tun (2014), *Yupana*; E. C. Aquisé (2015), *Yupana y el tablero posicional*; D. Prem (2016), *Yupana Inka: Decodificando la Matemática Inka*; C. Bustos, L. Hernando Vergara y C. J. Luque Arias, El ábaco inca y las operaciones aritméticas; Radamés A. Altieri y Carol J. Mackey, *Quipu y yupana*, y otros.

Desde que, en 1912, se publicara la yupana en las actas del Congreso de Americanistas de Londres, se han realizado diversos estudios sobre la yupana, desde los ángulos histórico, antropológico y etnológico. En educación, la educación matemática en especial, a partir de las interpretaciones expuestas, se han realizado diversas experiencias pedagógicas de la yupana como material educativo, especialmente para la escuela rural, en diversos países de Latinoamérica, como la desarrollada por la profesora peruana Martha Villavicencio en 1982, en el marco de la política de Educación Bilingüe Intercultural (EBI) implementado desde la década de los 70 del siglo XX, a fin sanar los procesos cognitivos violentados por la enseñanza occidental memorística, consecuencia de la educación castellanizante y asimilacionista (Vilca et al., 2018). Se ha realizado además publicaciones de libros, artículos científicos, blogs personales e institucionales, sitios web, tutoriales en YouTube sobre el uso de la yupana, generándose una variedad de propuestas de modelo y método de aplicación de la yupana.

Sin embargo, no se conoce con precisión cuáles y cuántas son las investigaciones y experiencias desarrolladas sobre su uso en la educación matemática, qué temas se han abordado, en qué países y niveles educativos, qué aplicaciones se han desarrollado y qué tipos de yupana se han utilizado. Solo se sabe de manera genérica que existen estudios sobre las bondades didácticas de la yupana en el aprendizaje del valor posicional de los números y cálculos aritméticos realizados en Perú, Ecuador y Bolivia (Vargas y López, 2000, citado por Montalvo-Castro, 2014), además de una aproximación hecha por Urbizagástegui (2014) sobre los soportes documentales e idiomas más utilizados para publicar investigaciones sobre el khipu, yupana y tocapu; por lo que, es objetivo del presente analizar las investigaciones realizadas sobre la aplicación y efectos de la yupana en el aprendizaje de la matemática en América Latina, para así delinear campos que aún no han sido explorados y reorientar sus aplicaciones y futuras investigaciones.

## Materiales Y Métodos

### Tipo y diseño de investigación

El estudio corresponde al enfoque cualitativo, siendo la técnica empleada la revisión de literatura de investigaciones y experiencias sobre los efectos de la yupana en la educación matemática realizadas hasta el 2022, a nivel de América Latina, específicamente en los países de Perú, Ecuador, Bolivia, Chile y Colombia.

### Unidad de análisis

Las unidades de análisis estuvieron constituidas por publicaciones de tesis (pre y



posgrado), artículos científicos (en bases de datos), reportes de tesinas (segunda especialidad) y experiencias, obteniéndose 45 trabajos académicos, algunos de acceso restringido. Se extrajo información vía rastreo virtual de páginas como la de la Biblioteca virtual del CONCYTEC - Perú (<https://biblioteca.concytec.gob.pe>), portal Scopus, portal Scielo (<https://scielo.org>), portal Latindex (<https://latindex.com>), Google académico (<https://scholar.google.es>), Google (<https://www.google.com>), repositorios institucionales y páginas de instituciones académicas. Se hizo una búsqueda ampliada mediante las palabras clave ‘yupana’, ‘ábaco inca’, ‘calculadora inca’ y otros, en español e inglés.

### Método de análisis

La estrategia de análisis de información consistió en identificar el documento, realizar la lectura de cada uno y, considerar el documento con información relevante y relacionado al objetivo del estudio. Los datos se analizaron comparativamente con apoyo de la estadística descriptiva, considerando criterios como tema abordado, para determinar los temas más y poco abordados; año de la investigación; país de desarrollo, para ver aquel con más estudios; nivel educativo en el que se experimentó; nivel académico en el que se desarrolló; el modelo de yupana y el método más empleado. Se expusieron aquellas experiencias innovadoras sobre la yupana, en tanto otros, solo fueron referenciados para fines de consulta. Los resultados permitieron delinear nuevas posibilidades de investigación y aplicación de la yupana.

## Resultados Y Discusión

### 1. Experiencias pedagógicas de aplicación de la yupana en educación matemática desde 1982 a 2022

#### 1.1 La adaptación y experiencia pionera de Martha Villavicencio Ubillús, 1982-Perú

En el marco de una educación bilingüe de transición (Vilca et al., 2018), Villavicencio adaptó la yupana para niños de los primeros grados de escuelas bilingües (castellano-quechua/aymara) (Fig. 10), con criterio pedagógico, para la enseñanza y aprendizaje de la matemática, acorde a las exigencias del nivel de operaciones concretas del desarrollo del pensamiento de J. Piaget, a partir de la teoría interpretativa de W. Burns. Las columnas (orden posicional), de derecha a izquierda, llevan la letra ‘S’ que indica unidades (*sapankuna*); ‘Ch’, decenas (*chunkakuna*); ‘P’, centenas (*pachaqkuna*); ‘W’, millares (*waranqakuna*); y ‘ChW’, decenas de millar (*chunka waranqakuna*) (Villavicencio, 1983). Los casilleros contiene 5,3,2,y 1 agujeros respectivamente, recortando el uno.

**Adición.** En la suma  $234+45=279$ , siguiendo el método Burns, el primer sumando (234), se coloca 4 fichas en la posición de las unidades, 3 en las decenas y 2 en las centenas. Del mismo modo, el segundo sumando (45), se coloca 5 fichas en las unidades y 4 en las decenas, en la parte externa de la Yupana para mejor comprensión, introduciéndolas según corresponda, de unidades a centenas, y el resultado se obtiene por simplificación (Guzmán et al., 2018) (Fig. 9). Si se desea realizar una suma llevando, por ejemplo  $5 + 7$ , se coloca 5 fichas en la columna de las unidades y luego 7, pero sobrarán 2 fichas, considerando que sólo acepta 10 fichas. Entonces, las 10 fichas deben convertirse en una sola ficha de valor 10, o sea una decena, que debe ser colocada en la columna de las decenas, y así se obtendrá 12 (1 ficha en decenas y 2 en unidades).

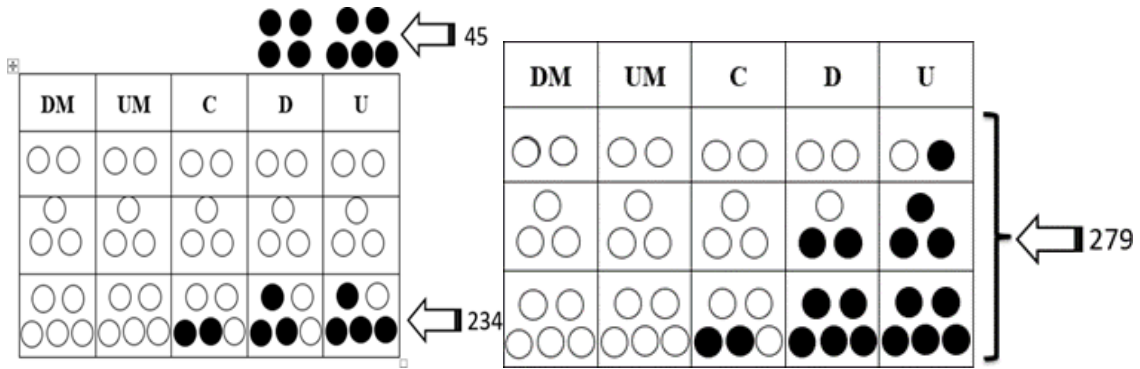


Figura 9

Adición (234+45) en el modelo de Villavicencio

Nota. Guzmán et al., 2018.

**Sustracción.** Para realizar la resta, se coloca primero las fichas del minuendo para luego quitarles las fichas correspondientes del sustraendo, las semillas restantes son el resultado. En la resta  $67-43=24$ , el minuendo se representa con 6 fichas en las decenas y 7 en las unidades, luego, el sustraendo actúa como una cantidad que se debe retirar, o sea, retiramos 3 fichas de las unidades y 4 de las decenas. Las fichas que quedan son el resultado (diferencia). En la sustracción con préstamo, “el niño debe quitar una ficha- por ejemplo, de las decenas – y convertirla en diez unidades. Estas fichas deben colocarse en la columna de las unidades” (Schroeder, 2000, p.53).

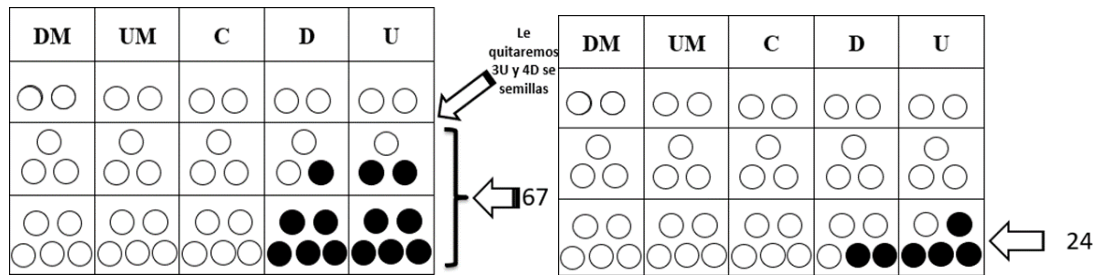


Figura 10

Ejemplo de una sustracción de dos cifras

Nota. Guzmán et al., 2018.

En Perú fue implementada como política de Estado a través del Instituto Nacional de Información y Desarrollo – INIDE (1984) en el marco de la Educación Intercultural Bilingüe iniciada en 1970, por el Ministerio de Educación. A partir de esta propuesta madre se han desarrollado experiencias en otros países como Bolivia, Colombia y Chile.

### 1.2 La yupana expuesta por Oscar Pacheco Ríos, 1999-Bolivia

Pacheco Ríos (1999), en *Del Quipu a la yupana: el computador ancestral*, hace una exposición detallada de la experiencia boliviana de la yupana de Guamán Poma de Ayala a raíz de la reforma educativa iniciada por el Ministerio de Educación Cultura y Deportes de Bolivia, con base al método de Burns, pese a ser partidario del método de Radicati. En espíritu es similar a la experiencia peruana de Villavicencio, en operaciones aritméticas, por lo que aquí se expone ejemplos de multiplicación y división.

**Multiplicación.** Pacheco (1999), indica que para multiplicar  $23 \times 3 = 69$ , “basta repetir el multiplicando tantas veces como lo indica el multiplicador, como en este caso el multiplicador es 3, por ello tenemos en una vez en **a)**, 2 veces en **b)**, 3 veces en **c)**, finalmente esta última acción determina la operación final y tenemos el producto en **d)**, con fichas de un solo color para las unidades y de otro color para las decenas”.

**División.** En  $12/4=3$ , en primer lugar se descompone la decena en 10 unidades y se llevan a la respectiva casilla en b). Como ellas han desbordado la columna, las sobrantes se colocan fuera. Luego, se procede como en el anterior a recontar de 3 en 3 fichas y se les da un color de modo que se note cada grupo en c) y se tiene 4” (Pacheco, 1999).

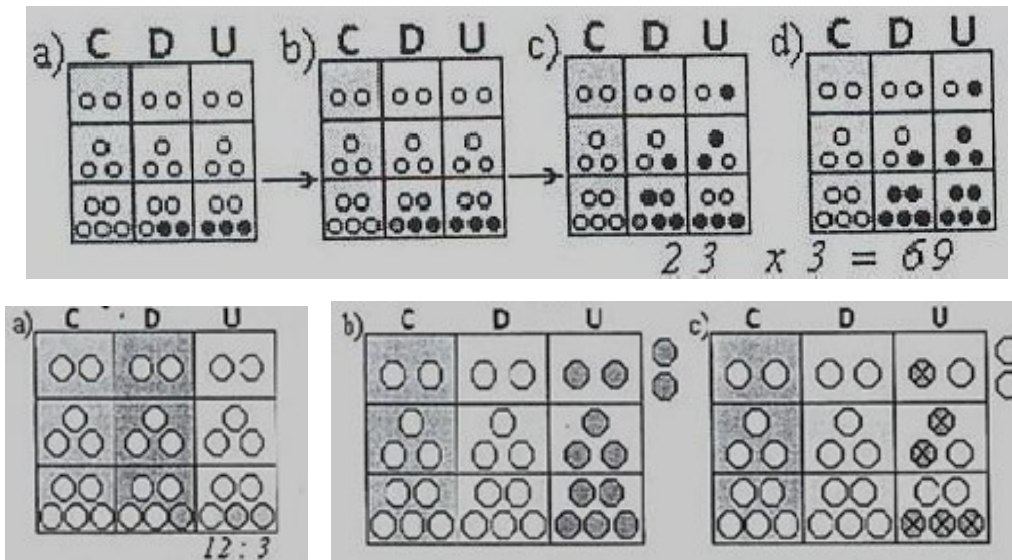


Figura 11

Arriba: Multiplicación; Abajo: División en la yupana boliviana

Nota. Pacheco Ríos, 1999.

### 1.3 Yupana dinámica y radicales de Carlos Alberto Hernández García, 2004-Colombia

En 1999, Pacheco Ríos, pretendía descubrir la aplicación de la yupana en la radicación. En 2004, Hernández García, en Una Yupana para cada niño, presentó una experiencia de cálculo de raíz cuadrada. En esta yupana, un rectángulo cuadrículado y sin asignación de valores ni letras, el número 2351 se representa tal como se observa en la figura 14, con base al método Radicati. El cálculo de la raíz cuadrada de un número obedece a dos momentos. Se necesita dos yupanas dinámicas de siete órdenes. Es muy probable que en operaciones complejas se haya requerido de yupanas adicionales para almacenar granos (Leonard & Shakiban, 2010). Una de ellas debe estar dividida en columnas de dos grupos. Por ejemplo, de rojo las del extremo derecho, anaranjado, los dos siguientes de la izquierda. El método lúdico a emplear se llama Genocidio, y consiste en eliminar cantidades. Posteriormente será propuesta también por Apaza (2017).

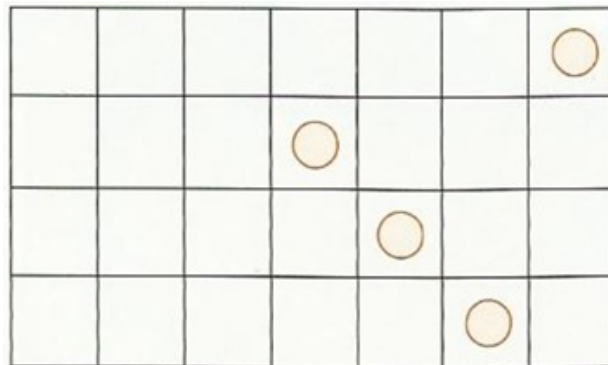


Figura 12

Yupana dinámica y representación de 2351

Nota. Hernández, 2004.

### Experiencia del modelo y método de Miguel Ángel Pinto Tapia, 2010-Perú

Pinto (2010), en Guía de uso de la calculadora y yupana inka en la enseñanza de la matemática presenta una experiencia con la yupana arqueológica de piedra del Callejón de Huaylas – Perú (Fig. 1-k), con otro procedimiento de cálculo. Una yupana ideada en el marco de la cosmovisión andina, tiene 21 casillas y dos áreas que cumplen diferentes funciones: área de cálculo y área de registro. El primero tiene 15 divisiones externas (área sombreada); y el segundo, seis divisiones internas de diferente área cada una y valores de 1,2,3 y 5, cuyo funcionamiento ha sido descifrada por Nicolino De Pasqueale y es el área de los cálculos. Respecto al área de registro, el de la derecha, sirve para registrar números naturales y el de la izquierda para decimales (Pinto, 2010) (Fig. 13). Adviértase la representación del número 86 y 99 (Fig. 13), y una adición, pudiendo desarrollarse operaciones complejas. Para sumar  $6+3=9$ , primero se representa el primer sumando en el área de cálculo y se pone cuentas en el casillero de las unidades; luego, se representa el segundo sumando al igual que el anterior y se agrega cuentas en casillero de las unidades; finalmente, se retira las cuentas del área de registro y se cuenta lo que se ha reunido y ese es el resultado (9).

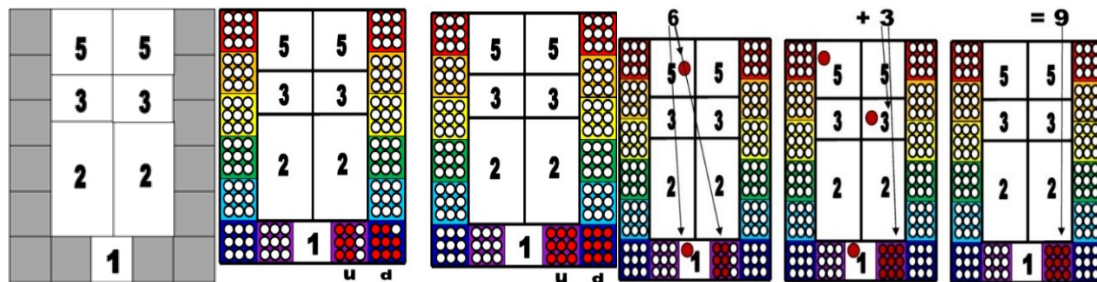


Figura 13

Representación de números (86 y 99) y adición ( $6+3$ ) en la calculadora inca

Nota. Pinto (2010).

### Adaptación y experiencia de Jesús Ríos Mencia, 2013-Perú

Ríos (2013), en Las Matemáticas ancestrales y la Yupana, manteniendo la posición original de la yupana de Guamán Poma, plantea que la primera fila (de abajo hacia arriba) representa a las unidades (*sapa*), la segunda a las decenas (*chunka*), la tercera a las centenas (*pachaq*), la cuarta a los millares (*waranqa*), y la quinta a las decenas de millar (*chuncawaranqa*). En las casillas de la primera, segunda y tercera columna, llamada *Patanraqui*, se representa y opera cantidades de 1 a 10. La cuarta columna, de la casilla de un círculo, es una casilla ‘comodín’, que sirve para reemplazar 5 unidades con un solo grano (*pisqa rantin* = P.R.) (Fig. 14). Una variante del método Burns, en el que la casilla de un solo punto era para efectuar los canjes

En una adición, como  $4927+1835=6762$ , la cantidad 4927 se representa con fichas en la primera columna de la izquierda, iniciando desde abajo en la primera fila le otorga el valor cinco, en la segunda fila las decenas, la tercera fila las centenas y así en lo sucesivo (esquema A); luego, se representa 1835 iniciando en la segunda columna de la izquierda y continúa con el mismo procedimiento de valoración posicional en las filas, como en el caso anterior (esquema B). Se simplifica las fichas considerando que, en la primera columna de la derecha, puede contener solo un grano, de haber dos granos pasa como una unidad del nivel inmediato superior (Zeballos, 2019).



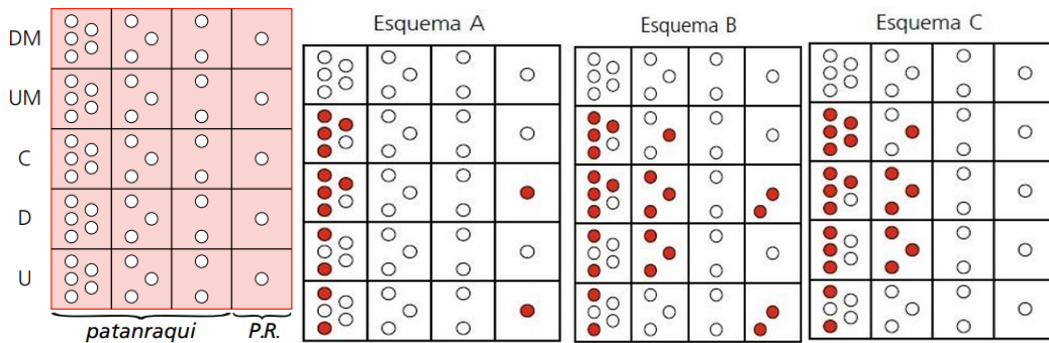


Figura 14

Tablero de Ríos Mencia y cálculo de 4927+1835

Nota. Ríos (2013); Zevallos (2019).

**La Yupana Multibase de Herbert Jhon Apaza Luque, 2017-Perú**

Apaza (2017), en *La Yupana: material manipulativo para la educación matemática* alcanza una propuesta teórica denominada Yupana Multibase, siendo funcional para sistemas distintos al decimal (Pardo, 2018; Zevallos, 2019) y conversiones de base. La base binaria está compuesta por la comuna de 1; la base ternaria por dos columnas (1-2); la base cuaternaria por tres columnas (1-2-3); y la base decimal por cuatro columnas (1-2-3-5), aunque para Leonard & Shakiban (2010), solo opera el sistema quinario-decimal, como en el ábaco chino. La propuesta respeta la posición original de Guamán Poma, y aplica el método Radicati, es decir abstracta. La ausencia de agujeros en los casilleros, obliga al niño a desarrollar su capacidad de abstracción al operar conservando las cantidades en su memoria de acuerdo al valor de cada casillero. Ideal para trabajar la fase simbólica de la matemática. Esta propuesta, aún no reporta resultados de investigación.

En la parte inferior de la yupana se dibuja grupos de puntos de 5, 3, 2 y 1, se trabaja de derecha a izquierda. En la parte lateral derecha se escriben las iniciales ‘S’, ‘CH’, ‘P’, ‘W’ y ‘CHW’, al igual que Villavicencio y Ríos, debiendo graduarse según el grado. Para los algoritmos de multiplicación, división, potenciación, radicación, etc., se emplean piedrecillas de tres colores: negro y dos colores auxiliares. Se mantiene la casilla #1 para la descomposición de los números 6, 4 y 9, que no se opone al método de operación en el sistema decimal empleada hasta la fecha por el Ministerio de Educación.

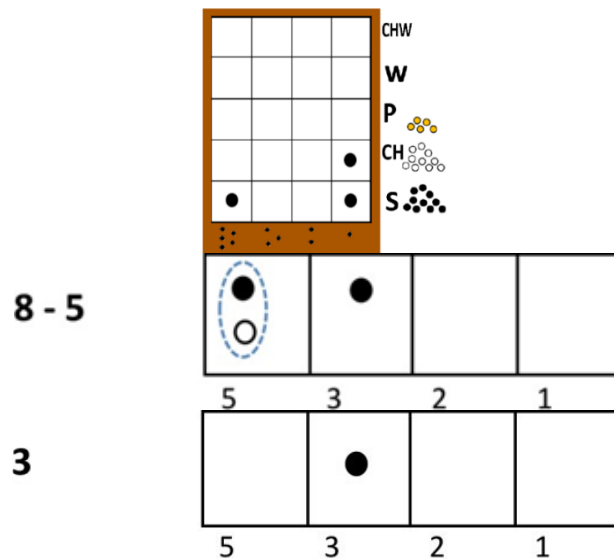


Figura 5

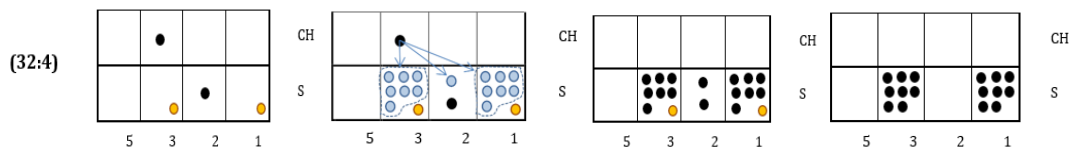
Yupana Multibase de Apaza y representación del número 16 y ejemplo de resta (8-3).

Nota. Apaza (2017)



**Sustracción.** Para efectuar esta operación se necesita fichas de dos colores diferentes. Se emparejan los colores opuestos, seguidamente se retiran las fichas emparejadas, y se totaliza a la mínima cantidad de casilleros. Por ejemplo, para la sustracción de  $8-5=3$ , se representa 8 con las fichas negras y luego el 5 con las fichas de color blanco. Como se ve en la figura 15, las fichas emparejadas se retiran, y el resultado será lo que quede.

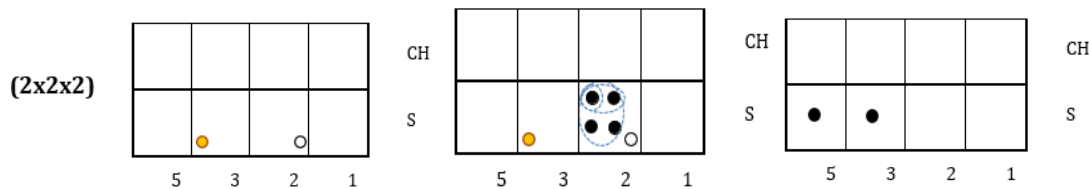
**División.** Para obtener el cociente se emplea la concepción de ‘distribuir en grupos’. El dividendo (ficha de color negro) es distribuido en grupos tal cual indica el divisor (ficha de color marrón), y si alguna ficha (cantidad) no completa al grupo es el residuo (Apaza, 2017). En la división de  $32/4=8$  se procede así: La ficha que equivale a 30, en la segunda fila, de las decenas, se debe descomponer en grupos de cuatro, lo que se consigue repartiendo de la siguiente forma: una vez ‘cuatro’, dos veces ‘cuatro’ que equivale a ocho, tres veces ‘cuatro’ que vale doce..., hasta siete veces ‘cuatro’ que vale veintiocho, sobrando dos que son ubicados en el casillero correspondiente al grupo dos. Las fichas del casillero de dos hacen cuatro (dos veces dos), por lo que se debe descomponer en una ficha en el casillero de tres y otra ficha en el casillero de uno. De ese modo se repartió todas las fichas. La respuesta es ocho, pues en cada casillero (donde están las fichas marrones) se repartió 8 fichas, en partes iguales.



**Figura 16**  
División en la yupana

Nota. Apaza (2017)

**Potenciación.** Para efectuar potencias en la yupana se debe emplear multiplicaciones reiterativas de la base, es decir, multiplicar reiteradas veces la denominada ‘base’, según las veces que indique el ‘índice’ (Apaza, 2017). Se usa fichas de color negro para las multiplicaciones y marrones para indicar el índice. Por ejemplo, si se pide hallar la potencia de dos al cubo, la base está representada de color blanco y el exponente de color marrón. El proceso de potenciación se sustenta en la duplicación de la base, en tres reiteraciones: la primera representa la base, la segunda es la duplicación de aquella, y la tercera se vuelve a duplicar el resultado anterior (Apaza, 2017). La cantidad resultante en el casillero se representa en su forma simplificada en la menor cantidad de casilleros, en este caso resultará 8.

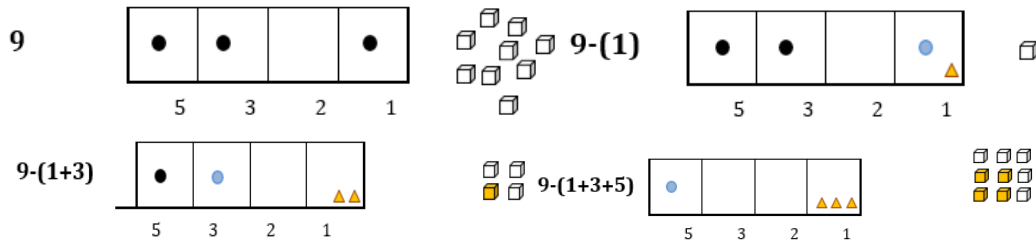


**Figura 17**  
Ejemplo de potenciación

Nota. Apaza (2017)

**Raíz cuadrada.** En la operación de radicación se efectúa una serie de sustracciones de 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, etc. (siempre números impares y secuencialmente) que son las cantidades con las que se forman los cuadrados. Para obtener la raíz cuadrada de un número, se debe registrar la cantidad de veces de una sustracción sucesiva de cuadrados (Apaza, 2017). En su obra, el autor ofrece posibilidades para radicales en el orden de decenas, centenas y millares. En este caso, ejemplificamos el proceso de obtención de la

raíz cuadrada de 9: el radicando (9) se representa en el o los casilleros correspondientes, en este caso de color negro. A un costado, se registra con fichas marrón la cantidad de veces de las sustracciones sucesivas realizadas.



**Figura 18**  
Ejemplo de radicación

Nota. Apaza (2017)

De acuerdo a Apaza (2017), La primera forma cuadrada está formado por la unidad, por tanto se retira la piedrecilla de valor uno y se registra una vez con piedrecilla de color marrón. La segunda forma cuadrada está formada por tres objetos más, por lo que se retira el valor tres y se vuelve a registrar esta sustracción. La tercera forma cuadrada está formada por cinco objetos más, por lo que se retira cinco y se vuelve a registrar esta sustracción. No habiendo más cantidades para formar cuadrados, finaliza el proceso.

**Yupana y fracciones de Ángel Bernabé Palli Salas, 2015-Perú**

Palli (2015), en *Yupana* fraccionaria presenta un modelo de yupana para enseñar fracciones (homogéneas, heterogéneas, mixtos). Tiene tres columnas principales con la denominación ‘enteros’, ‘denominador’ y ‘numerador’, subdividida cada una en tres columnas: Unidades, Decenas y Centenas. Para representar  $2/5$ , se coloca una ficha en la casilla ‘2’ de las unidades de la columna de numerador y otra en la casilla ‘5’ de las unidades de la columna ‘denominador’ (Fig. 20 - arriba). En una adición de fracciones, se sugiere utilizar dos fichas de diferentes colores para los sumandos. En la adición de fracciones homogéneas  $3/8 + 4/8$ , primero se debe representar esta cantidad en la columna de numerador y denominador; luego, como es fracciones homogéneas, en la columna de denominador quedarán las fichas de un solo color ( $3+5=8$ ) y se sumarán los números del numerador. Las fichas resultantes en su forma más simple, es el resultado.

	ENTERO			DENOMINADOR			NUMERADOR		
	C	D	U	C	D	U	C	D	U
1									
2									●
3									
5						●			

	ENTERO			DENOMINADOR			NUMERADOR		
	C	D	U	C	D	U	C	D	U
1									●
2									●
3							●	●	●
5							●	●	●

**Figura 20**

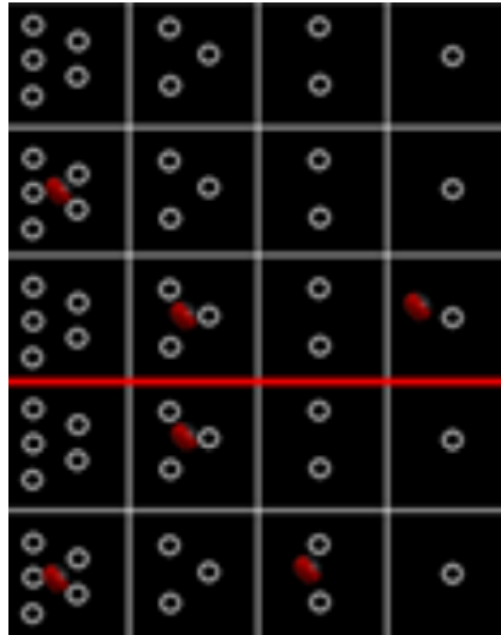
Yupana fraccionaria. Representación de  $2/5$  (arriba) y adición de fracciones (abajo).

Nota. Palli (2015)

**Yupana y decimales**

Existen dos modelos de Yupana para realizar cálculos con números decimales. El primero es el de Pinto (2010), que expone la forma de operar fracciones en la yupana arqueológica del Callejón de Huaylas-Perú, en el que el extremo derecho actúa como decimales y el izquierdo, para enteros (Fig. 21). El segundo es el desarrollado por Rojas

y Stepanova (2015), respetando los cuatro casilleros de Guamán poma (5-3-2-1). No existen evidencias de si los Incas operaron con decimales en la yupana, pero los autores citados indican que solo hay que imaginarse una línea horizontal de la Yupana que divida a los números enteros por encima y los decimales por debajo. En la figura 21, a mérito del autor del presente, está representado el número decimal 54.37.



**Figura 21**

Representación de número decimal en la yupana.

Nota. Rojas y Stepanova (2015)

### Yupana y las teorías de sumatorias, matrices y vectores

Rojas-Gamarra y Stepanova (2015), en Sistema de numeración Inka en la Yupana y el Khipu desarrollaron un método para representar números utilizando matrices. Indican que los números 5-3-2-1, de la yupana son números primos. El número de casilleros por fila y las circunferencias son ideales; si estas disminuyeran, se usaría más semillas y los cálculos se harían engorrosos; y si aumentasen, habría muchas maneras de representar un solo número. No se necesita el casillero con cuatro circunferencias, porque se le puede representar con dos semillas en el casillero de 2 o una en 3 y otra en 1. El sistema es binario, quinario y decimal. En este método, cada semilla se multiplica por el valor del casillero (5-3-2-1), similar al método De Pascuale que plantea trabajar en base 40 y 36. Rojas y Stepanova (2015), proponen usar la base 10. En vez de representar tediosamente los números (sumatorias) con nudos en los khipus, proponen representarlo simplificando y de forma compacta a través de la teoría de matrices y vectores. Para representar un número, se requiere de dos matrices. El procedimiento debe consultarse en la obra.

$$\begin{pmatrix} a_{(-1)} & a_{(-2)} & a_{(-3)} & a_{(-4)} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{-m1} & a_{-m2} & a_{-m3} & a_{-m4} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A_{(-1)} & A_{(-2)} & A_{(-3)} & A_{(-4)} \\ A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{-m1} & A_{-m2} & A_{-m3} & A_{-m4} \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{Figura 21} \\ \text{Yupana} \end{matrix} \quad (9.c)$$

**Figura 22**

Representación matricial de números de la yupana.

Nota. Rojas-Gamarra y Stepanova (2015).

**Yupana y números enteros de Jesús Malpartida Calero, Lilian Meramendi Salazar y Ruth Meza Loreña, 2017- Perú**

Existen experiencias de modificación de la yupana como el desarrollado por Malpartida et al. (2017), en *La yupana* y el aprendizaje de la multiplicación de números Enteros en los alumnos del primer grado de educación Secundaria. En yupana consiste en una tabla de doble entrada de 11 x 11 (Fig. 23), pudiendo ser de menor relación. Véase el siguiente tablero para efectuar la multiplicación de enteros.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

**Figura 23**

Yupana adaptada para números enteros.

Nota. Malpartida et al. (2017).

**Yupana, logaritmos y potenciación**

Además de Apaza (2017) y Bustos et al. (2019), en *El ábaco inca* y las operaciones aritméticas, plantean hacer uso de la yupana en el aprendizaje de la potenciación y logaritmos en base al modelo Wassén. El cálculo de logaritmos requiere de dos yupanas (una principal y otra auxiliar). El procedimiento general para hallar el  $\log_x n$  donde  $n$  y  $x$  son números naturales mayores a 0, es que, primero, se debe representar ‘ $n$ ’ en la yupana auxiliar y ‘ $x$ ’ en la principal, y operar siguiendo un procedimiento establecido por los autores. Aunque esta cualidad falta profundizar por Falta de fuentes bibliográficas más confiables.

Margarita Gentile (1992), citado por Orellana (2005), autora de *Las investigaciones en torno al sistema de contabilidad incaico*, sostenía que en la yupana no se realizaban operaciones aritméticas complicadas, sino que les bastaba la suma y la resta. Las nuevas investigaciones revisadas, demuestran que se puede efectuar cálculos con números enteros, decimales, fracciones, radicales, potencia, logaritmos, matrices, vectores y conversiones de bases (binario, ternario, cuaternario, quinario, decimal, 40). En el incanato hubo yupanas más complicadas en las cuales se debieron realizar las operaciones de cálculo superior tales como la raíz cuadrada, potenciación, sin los cuales hubiera sido imposible que realicen grandes obras de ingeniería (Pachas, 2016).

**Aplicativo Yupana hardware y software de Walter Hector Gonzales Arnao, 2015**

La yupana se ha adaptado a las exigencias del mundo de las tecnologías de la información y comunicación. Gonzales Arnao, en *Sistemas de cálculo de los Incas*, ha

desarrollado un hardware y software para la yupana de Guamán Poma. Comprende una placa de circuito impreso (1) para el montaje de los componentes electrónicos, sensores (2), microprocesador (3), interruptores (4, 4', 4''), circuitos integrados (5), pantalla (6) de visualización LCD; y cubierta (7) de acrílico transparente. El tablero está dividido en tres filas (U, D, C) de cuatro campos cada una, con sensores de acuerdo a los agujeros de la yupana (5-3-2-1). La yupana software (versión 1.0) está desarrollado en Visual Basic, y es utilizado como herramienta pedagógica en el nivel primario para realizar cálculos matemáticos donde los datos numéricos se pueden ingresar picando con el mouse.



Figura 24

Yupana hardware y software de Gonzales Arnao

Nota. Gonzales (2015)

### La yupana para teléfono celular y PC - Chile

En 2015, Rojas y Stepanova (Chile), desarrollaron una aplicación de la yupana para tabletas, teléfono celular y PC, un juego digital educativo basado en matrices y vectores (Fig. 25). Consta de un menú con cuatro botones: presentación del juego (Wasi), jugar (Puqllay), manual, y salir. En la derecha se puede ver el tablero y las semillas, que pueden deslizarse (huayruro, maíz, chucho y poroto), representando e los números 5437 y 235. El juego es en tres idiomas: quechua, inglés y castellano.



Figura 25

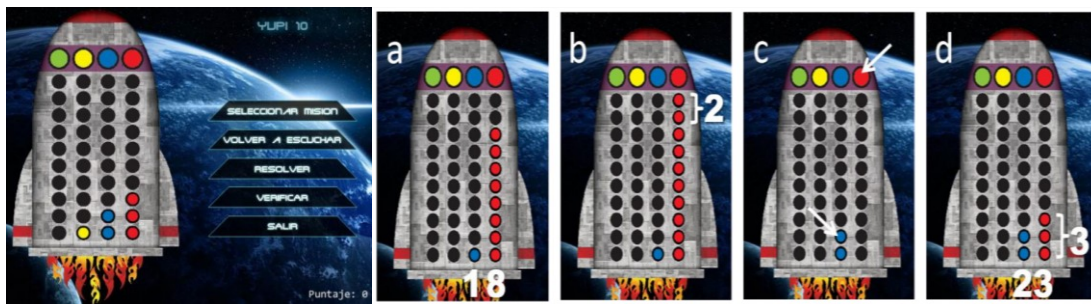
Yupana digital para Tablet, móvil y PC de Rojas-Stepanova

Nota. Rojas-Gamarra y Stepanova (2015)



### Interfaz y calculadora Yupi 10 integrada de Jorge Montalvo Castro, 2017-Perú

Montalvo (2017), desarrolló un prototipo de interfaz narrativa, un video juego interactivo llamado Yupi 10 para que los niños de nivel primario aprendan a sumar y restar, sin y con canje, vinculando lectura y matemática. Inicia con las aventuras de unos personajes llamados «Globits» (Yezi y Yozo) (Fig. 26). El juego incluye problemas aritméticos elementales verbales – PAEV a ser resueltos siguiendo cinco niveles de dificultad. Un ejemplo de adición es el siguiente:  $18 + 5$ . Primero, encender con el cursor 8 unidades en la primera columna y 1 decena en segunda columna, desde la derecha; luego añadir las 5 unidades en la primera columna y como se advierte que solo hay dos agujeros libres, se debe canjear las 10 unidades por 1 decena (apagando todas las luces rojas y encendiendo una luz azul en la segunda columna), debiendo prender solo 3 unidades restantes. Las luces que quedan prendidas, dan 23.



**Figura 26**

Pantalla inicial interfaz Yupi 10 y ejemplo de adición.

Nota. Montalvo-Castro (2014; 2017).

Además de estos desarrollos digitales, están las yupanas mecánicas y electrónicas de Hernández (2004), tamaño calculadora; la propuesta innovadora de los hermanos Dhavit y Divapati Prem (2014) en Perú, el software denominado yupana ‘Tawa Pukllay’, basado en un juego de competición de mesa (Zeballos, 2019), similar al del ajedrez, aplicando el método Radicati; el desarrollo de la aplicación interactiva ‘yupana digital’ de Jennylee Murillo (2010), en Bolivia, para las cuatro operaciones; y la aplicación descargable para el programa OLPC “One laptop per child – OLPC” (una portátil por niño) lanzado en 2005 de Walter Bender del Massachusetts Institute of Technology (MIT), por el que niños de 35 países aprenden jugando con la yupana inca. Muchas de estas experiencias son poco o nada conocidas dentro de las aulas de formación de formadores, de profesores etnomatemáticos y por los profesores de aula, por lo que requieren investigación.

La yupana marcha acorde con la era digital. No creemos necesario poner límites al uso de las TIC para fortalecer la identidad cultural a través de la etnomatemática y la etnocomputación como indican Roncoroni y Bailón (2020). Creemos que la convergencia entre tecnología étnica y digital dinamizan no sólo el proceso didáctico favoreciendo aprendizajes en matemática (Ramón y Vilchez, 2019), sino el proceso educativo en general. No es suficiente enseñar las matemáticas, sino educar mediante las matemáticas y *con* las matemáticas (Bishop, 1999). Favorece el proceso identitario, didáctica, creatividad (Rojas-Gamarra y Stepanova (2015) y es que la matemática se aprende jugando.

## 2. Resultado de investigaciones y experiencias desarrolladas sobre la yupana como material educativo

**Tabla 1**

*Experiencias con la yupana, según temática, nivel educativo, tipo de estudio, modelo de yupana, año y país.*

Nº	Autor	Tema abordado	Nivel Educat.	Tipo de estudio	Modelo de yupana	Año	País
1	Villavicencio Ubillús, M.	Operaciones aritméticas	Primaria/E BI	Experiencia	Yupana 3	1982	Perú
2	Pacheco R.; O.	Operaciones básicas	Primaria	Experiencia	Yupana 3	1999	Bolivia
3	Ortega, M., & Guzmán, V.	Operaciones básicas	Primaria	Pregrado	Yupana 3	2003	Perú
4	Hernández García, C.A.	<i>operaciones básicas y raíz cuadrada.</i>	primaria	Artículo científico	Yupana 4	2004	Colombia
5	Martínez Avendaño, O.C.	Sistema Posicional de Numeración	Primaria	Pregrado	Yupana 3	2007	Colombia
6	Huanca, O. y Payahuanca, S.	pensamiento lógico matemático (noción de número)	<u>Inicial</u>	Pregrado	Yupana 3	2007	Perú
7	Fernández López, B.	Alfabetización de adultos Operaciones básicas	Primaria/aymara	Segunda especialidad	Yupana 4	2007	Bolivia
8	Bousany, Y.	<i>aprendizaje de la aritmética</i>	Primaria / quechua	Experiencia	Yupana 3	2008	Perú
9	Lina Nieto, N.	Operaciones – psicomotricidad	Primaria	Experiencia	Yupana 4	2009	Colombia
10	Mamani Vargas, M.P.	razonamiento lógico matemático (formac. docente)	Superior	Maestría, descriptivo	Yupana 4	2010	Perú
11	Murillo Zambrana, J.D.	<i>operaciones básicas</i>	Primaria	Experiencia	Yupana 4 <i>Yupana digital</i>	2010	Bolivia
12	Choquehuancaca L., G.	Aprendizaje de la adición	<u>Primaria</u>	Segunda especialidad	Yupana 3	2010	Perú
13	Pinto Tapia, M.	Operaciones básicas, Decimales	<u>Primaria</u>	Experiencia	Arqueológica	2010	Perú
14	Mejía Quispe, J.J.	<i>Cálculo Aritmético (suma, resta, multiplicación, división).</i>	Secundaria	Maestría	Yupana 3	2011	Perú
15	Quispe, A., & Mamani, R.	<i>aprendizaje de la multiplicación</i>	Primaria	Maestría	Yupana 3	2012	Perú
16	Seráfico Narciso, N.	<i>adición de números naturales</i>	Primaria	Pregrado		2013	Perú
17	Ríos Mencia, J.	<i>números y operaciones básicas</i>	Primaria	Pregrado	Yupana canje 4	2013	Perú
18	Arenas, G., & Pacca, M.	<i>Adición de N</i>	Primaria	Pregrado	Tres	2013	Perú
19	Vilchez Chumacero, R.	Número y operaciones aritméticas	<u>Primaria</u>	Artículo científico	Yupana 4	2013	Perú

20	Montalvo-Castro, J.	problemas lógico-matemáticos	Primaria	Experiencia	Yupana video (10 círculos)	2014	Perú
21	Gonzales Arnao, W.H.	<i>cálculos aritméticos (adición, sustracción, división y multiplicación).</i>	Primaria	Artículo científico	Yupana digital (hardware y software)	2015	Perú
22	Ccolque, V. y Suni, E.R.	<i>aprendizaje de números y operaciones</i>	Primaria /quechua	Pregrado	Yupana 3	2015	Perú
23	Palli Salas, A.B.	Fracciones	Primaria	Experiencia	Yupana fraccionaria 4	2015	Perú
24	Rojas-Gamarra, M. y Stepanova, M.	Decimales, matrices y vectores.	Secundaria	Experiencia	Yupana digital 4 Para PC, celular	2015	Chile
25	Apaza, H.J. y Atrio, S.	cantidad y operaciones básicas	Primaria /quechua	Artículo científico	Yupana 4 Abstracta	2016	Perú
26	Pachas de la Colina, C.E.	Suma y resta	<u>Primaria</u>	Experiencia	Yupana 4 (Burns)	2016	Perú
27	Gómez Chávez, J.R.	<i>Cuatro operaciones básicas</i>	Primaria	Experiencia	Yupana 3	2016	Colombia
28	Aroca, A.Y. y Lasso, K.Y.	Operaciones básicas	<u>Primaria</u>	Pregrado	Yupana 3	2016	Colombia
29	Apaza Luque, H.J.	Operaciones básicas, potencia y radicales	<u>Secundaria</u>	Doctorado	Yupana 4 abstracta	2017	Perú
30	Montalvo-Castro, J.	<i>problemas aritméticos elementales verbales PAEV</i>	Primaria	Artículo científico/ Sco	<i>Yupana 10, Yupi 10</i> , videojuego	2017	Perú
31	Obeso Macassi, R.M.	<i>aprendizaje de las cuatro operaciones básicas</i>	Primaria	Pregrado	Yupana 3	2017	Perú
32	Holguín Atehortúa, J. F.	número	<u>Inicial</u>	Maestría	Yupana 4	2017	Colombia
33	Malpartida, J.; Meramendi, L.; Meza, R.	aprendizaje de la multiplicación de números Enteros.	Secundaria	Pregrado	Yupana adaptada 11*11	2017	Perú
34	Basilio, F.; Javier, N.; Ortega, S.	<i>operaciones básicas</i>	Secundaria	Pregrado	Yupana 3 Programa yupanamat	2018	Perú
35	Bernedo Navarrete, G.M.	<i>operaciones aritméticas</i>	Primaria /periferia	Maestría experimental	Yupana 4	2018	Perú
36	Espitia Pinilla, S.E.	<i>problemas multiplicativos</i>	Primaria /rural	Maestría	Yupana 3	2018	Colombia
37	Pardo Gómez, J.	construcción del número	Primaria	Maestría	Yupana 3	2018	Perú
38	Guzmán, L; Huamani, V y Moya, N.	<i>resolución de problemas de adición y sustracción</i>	Primaria/S hipibo	Pregrado	Yupana 3	2018	Perú
39	Zeballos Quea, R.	<i>problemas de operaciones básicas</i>	Primaria	Pregrado	Yupana 3	2019	Perú
40	Saldívar, C., Saldívar, A.	<i>operaciones aritméticas sin</i>	Primaria	Artículo científico	Yupana 4	2019	Perú

	y Goycochea, D.	<i>cálculos numéricos mentales.</i>					
41	Yon D., J. y Mueña V., L.	desarrollo de capacidades matemáticas	<u>Inicial</u>	Pregrado	Yupana 3	201 9	Perú
42	Bustos, C.; Vergara, L. y Luque, C.	Operaciones aritméticas Potenciación y logaritmos	<u>Secundaria</u>	Experiencia	Yupana 5	201 9	Colombia
43	Mora, L y Valero, N.	Operaciones básicas Potenciación	<u>Primaria</u>	Artículo académico	Yupana 4	201 9	Colombia
44	Paragua, M; Paragua, M; Paragua, C.	multiplicación de números <b>enteros</b>	<u>universidad</u>	Artículo científico - Scopus	Yupana para enteros	202 0	Perú
45	Figueroa, E. y Mena, H.	Operaciones fundamentales	<u>Primaria</u>	Experiencia	Yupana 4	202 0	Costa Rica

Leyenda: Yupana 4 (4 casillas , 5-3-2-1), Yupana 3 (de 3 casillas, 5-3-2, adaptada de Burns).

### **Año, país, tipo de estudio: una opción para América latina**

De acuerdo a la Tabla 1, las experiencias y/o investigaciones sobre los efectos de la aplicación de la yupana en la educación matemática, cronológicamente, datan desde el año 1982 hasta 2020, identificándose 45 estudios, de los cuales 68.89% (31) se realizaron en Perú, país de la yupana, seguidos de Colombia con 20.00% (9), Bolivia con 6.67% (3), Chile con 2.22% (1) y Costa Rica con 2.22% (1). Estas investigaciones y/o experiencias, de acuerdo al tipo de estudio, corresponden a tesis sustentadas en segunda especialidad, pregrado, posgrado (maestría y doctorado); experiencias libres por académicos independientes y publicaciones de artículos científicos. Adviértase que mayor interés existe en estudios de pregrado, y que el 100% de los estudios arrojan resultados favorables para la yupana como material educativo, reduciendo la actitud negativa hacia la matemática (Choquehuanca, 2010).

### **La yupana y los niveles educativos: de la educación básica a la universidad**

Los estudios acerca de los efectos de la yupana en el aprendizaje de la matemática se enfocaron más en niños del nivel primario (6 a 8 años de edad, primero y segundo grados) con 34 estudios (75.56%), como lo advirtió Pacheco (1999), probablemente obedeciendo a las prioridades del enfoque de Educación intercultural; seguido del nivel secundaria con 13.33% (6), inicial con 6.67% (3), y superior con 4.44% (2). En educación primaria, la aplicación de la yupana se da en contextos rurales y periféricos, de habla quechua o aymara, de la sierra y la selva, pudiendo y debiendo aplicarse también en contextos urbanos e hispanos, y es que, según los estudios revisados, la yupana es un material de propiedades universales. En educación superior, aunque mínima, está enfocada en la formación de docentes interculturales, muy importante en los procesos de formación de profesores etnomatemáticos y reflexivos, para evitar el consumismo de la matemática occidental (Oliveras; Blanco-Álvarez, 2016; Blanco-Álvarez; Fernández-Oliveras; Oliveras, 2017). Los pocos estudios en el nivel secundario, están relacionados al aprendizaje de números decimales, enteros, matrices y vectores, mostrándose desde este nivel otras cualidades poco o nada conocidas de la yupana. Con esto, se colige que la yupana no solo tiene potencial para ser aplicada en educación primaria, sino secundaria e inclusive nivel superior, que son espacios académicos poco o nada explotados.

### **Temas investigados: nuevas aplicaciones, de sencillas a complejas**

Respecto a los temas abordados por las investigaciones y/o trabajos académicos, es notorio que, del total, 34 investigaciones (el 75.56%) están relacionadas a la eficacia de la yupana en el aprendizaje de operaciones básicas con números naturales (adición, sustracción, multiplicación y división), siendo esta la cualidad más conocida de la yupana como material educativo. Sin embargo, existen experiencias, aunque mínimas, relacionadas al aprendizaje de la noción de número (8.87%), esencialmente en educación inicial; razonamiento lógico matemático (4.44%), uno de ellos en formación de docentes; decimales, vectores y matrices (2.22%), específicamente en educación secundaria; números enteros (4.44%), aprendizaje de números racionales (2.22%), fracciones (2.22%), desarrollo de capacidades matemáticas (2.22%), alfabetización de adultos (2.22%). Con estos datos, se devela que la yupana tiene múltiples potencialidades y aplicaciones aún no exploradas, como en el aprendizaje de otras áreas del saber matemático como potencia, radiación, matrices, etc. Esta cualidad no es nueva, pues los incas no solo sumaban, restaban, multiplicaban y dividían en la yupana como indican Mora y Valero (2019), sino se efectuaba operaciones complejas sin los cuales no hubiera sido posible realizar grandes obras de ingeniería (Pachas, 2016).

### **Modelos de yupana: de la manualidad a la era digital**

Las yupanas arqueológicas y etnológicas mostradas en la Figura 1, no han sido motivo de interpretaciones teóricas y, por ende, tampoco de aplicaciones en el campo de la educación matemática, salvo el modelo de Callejón de Huaylas desarrollada por Tapia Pinto (2010) de diseño y método de operación diferente e innovador. La yupana de Guamán Poma, es el modelo más utilizado en las investigaciones y experiencias. Este modelo fue adaptado pedagógicamente, por Martha Villavicencio, para el aprendizaje de las operaciones básicas, como Tablero de Valor Posicional de tres casillas (5-3-2), girado en 90° (horizontal), cuyo método se basa y deriva de las interpretaciones teóricas W. Burns, experimentado en diversos países de América Latina. Emplea perforaciones de agujeros, acorde a las exigencias del periodo de las operaciones concretas de J. Piaget.

No hay yupana estandarizada. A partir de este modelo, se han desarrollado innovadoras propuestas, en función de las necesidades pedagógicas y temáticas, de yupana fraccionaria, yupana matricial, yupana decimal, yupanas para operar potencias y números enteros. También se tiene innovaciones tecnológicas como la propuesta de la yupana digital; software para PC, Tablet y celular; yupana como video juego, que ofrecen oportunidades lúdicas e interactivas de aprendizaje de la matemática. La eficacia de estos modelos debe probarse a través de estudios experimentales. Este material etnográfico ha demostrado tener características para adaptarse a los avances de la ciencia y tecnología, y tener cualidades pedagógicas para insertarse en la educación virtual. Las investigaciones indican que está migrando de la manualidad a la era digital, y es que los valores culturales que permiten hacer ciencia no tienen territorialidad o no son un patrimonio petrificado (Pacheco, 1999).

### **Método: ¿útil en la etapa de las operaciones concretas u operaciones formales?**

A la fecha no hay consenso sobre cuál fue el método original usado por los incas para realizar cálculos. Lo que sí se sabe es que, del conjunto de interpretaciones teóricas, las experiencias e investigaciones educativas han preferido el método Burns en un 95.65% como lo indican Bousany (2008) y Vilca-Apaza et al., (2023), aunque también existen iniciativas con el método Radicati y el método ideado para la Yupana del Callejón de Huaylas.



El 100% de las investigaciones y experiencias realizadas sobre la yupana como material y como método, responden a las exigencias psico-pedagógicas del estadio denominado operaciones concretas del desarrollo del pensamiento planteado por J. Piaget (6 a 12 años). Esto es que, la yupana adaptada de Villavicencio, a partir del modelo de Guamán Poma, basada en el método Burns, está diseñada para el trabajo pedagógico con niños que están en este periodo, que necesitan un soporte físico (agujeros) para ‘manipular’ semillas u objetos concretos y así adquirir conceptos (Holguín, 2017). Sin embargo, por sus cualidades mostradas en el acápite de ‘temas’, también es posible emplear la yupana en estudiantes de niveles superiores que se encuentra en la etapa de las operaciones formales (12 a más) o en la formación de profesores etnomatemáticos. Para ello, existe el método abstracto planteado por Radicatti, que no utiliza los agujeros sino solo la memoria, obviado en las investigaciones educativas, pero propuesta teóricamente por Apaza (2017). Estos son los nuevos retos y posibilidades de investigación por emprender y conocer

Consideramos que se deben desarrollar investigaciones con la yupana de cuatro casillas (5-3-2-1) en abstracto (sin apoyo de los agujeros) porque ofrece mejores cualidades para el desarrollo intelectual, posibilidades de pensar abstractamente. Un ejemplo es el del estudiante con bajo rendimiento de la Escuela Gran Bretaña en Lima – Perú, mostró su habilidad de manejar los sistemas numéricos andinos y hasta identificó el padrón de la serie Fibonacci gracias a la yupana (Tun y Diaz, 2015). La verdadera potencialidad de la yupana en la educación matemática, a nuestro entender, aún no ha sido explotada. El ábaco inca sirve para desarrollar la capacidad de abstracción, tan necesaria para cultivar la capacidad de síntesis y deducción. Es apropiada para adquirir habilidades mentales, aumentar la capacidad de concentración y lograr seguridad personal (Hernández, 2004). Cronistas como Garcilaso y Guamán Poma indican que los Quipucamayoc eran mucho más rápidos y eficaces que los invasores (Rojas-Gamarra y Stepanova, 2015), mostrando gran desarrollo. En las Tradiciones Peruanas, Ricardo Palma narra cómo el inca aprendió rápidamente el ajedrez tan solo ver jugar a los españoles. Por su parte, el jesuita José Acosta, en 1577, informa a sus superiores en Roma, que los incas aprendían la teología, filosofía, cánones para ser sacerdotes en dos meses, mientras los españoles requerían cinco meses en lograr tal conocimiento (Antúnez, 2003).

### **Elaboración y material empelados para su elaboración**

Las yupanas identificadas son de fácil elaboración por profesores y estudiantes y a bajo costo, excepto las digitales, y de múltiple aplicación. Se pueden hacer de madera, triplay, piedra, arcilla, yeso, hueso, Tecnopor/microporoso, cartulina, plástico o, simplemente, dibujar en papel o rayar en el suelo, finalmente se pueden elaborar con materiales de la zona. Como fichas pueden actuar piedrecillas naturales o pintadas, semillas de frejoles, maíz, poroto, quinua y granos cualesquiera, huayruro, fichas de colores, y también materiales sofisticados como canicas y fichas artificiales. Las medidas no son estandarizadas, ello tampoco es relevante, lo importante es que se adapte a las necesidades pedagógicas y curriculares del niño, es decir de acuerdo al grado de estudios.

La yupana es de fácil elaboración y bajo costo, pero de múltiple aplicación. Se puede hacer de madera, triplay, piedra, arcilla, yeso, hueso, Tecnopor/microporoso, cartulina, plástico o, simplemente, dibujar en papel o rayar en el suelo. Finalmente se pueden elaborar con materiales de la zona. Como fichas pueden actuar piedrecillas naturales o pintadas, semillas de frejoles, maíz, poroto, quinua, huayruro y granos cualesquiera, y también materiales sofisticados como canicas y fichas artificiales. Las medidas no son estandarizadas, ello tampoco es relevante, lo importante es que se adapte a las necesidades pedagógicas y curriculares del niño.

## Conclusiones

La revisión de literatura conduce a afirmar que, pese a casi 500 años de colonialismo político y académico (1531-2031), en el que tanto el colonizador como el colonizado son responsables, el uno por encubrir y el otro por imitar la cultura occidental, la yupana se mantiene vigente como riqueza etnocientífica adaptándose a los avances de la tecnología y empoderándose de los procesos de aprendizaje de la matemática. A la luz de las corrientes hermenéuticas, la interculturalidad, la justicia social y la etnomatemática (Vilca et al., 2020), ha cobrado notoriedad, coadyuvando no solo al desarrollo de la educación matemática sino al proyecto decolonial que busca desenmascarar los discursos hegemónicos (Tun y Díaz, 2015). Las investigaciones efectuadas sobre la yupana, en los diversos países, son un tributo a esta tecnología ancestral, que son aún insuficientes, por lo que queda el reto de divulgar sus bondades. América en lo cultural está apenas por descubrir (Pareja, 1986).

**De lo básico a lo complejo.** Las bondades de la yupana no están explotadas en su totalidad. Hay temas hartos recurrentes y temas por abordar. Hasta el 2021, del total de 45 estudios desarrollados desde 1982, el 65% ha enfocado su interés en los efectos de la yupana, como material educativo, en el aprendizaje de la aritmética básica, especialmente en niños de educación primaria en Perú, por lo que, más investigaciones al respecto son ya innecesarias. Sin embargo, las experiencias y propuestas innovadoras desarrolladas en diversos países de Latinoamérica, enseñan que la yupana tiene una amplia gama de aplicaciones poco o nada conocidas, potencialidades y posibilidades de trabajo con operaciones complejas como radicales, potencias, decimales, fracciones, logaritmos, matrices y vectores, además es posible trabajar en los sistemas decimal, binario, ternario, cuaternario y quinario, sugiriéndose reorientar las investigaciones hacia estas temáticas.

**De lo concreto a lo abstracto.** El análisis permite afirmar que existen varios métodos (teorías interpretativas) de uso de la yupana, cuyas bondades pedagógicas no están evaluadas científicamente. La teoría interpretativa, más empleada, que sirvió de base a las experiencias de educación matemática en América Latina, fue la de William Burns. Adoptar el método Burns para operar la yupana en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática tiene sus ventajas, pero también presenta limitaciones. Este método responde a las exigencias del periodo del desarrollo del pensamiento concreto u operaciones concretas de J. Piaget, por eso es que funciona con agujeros y ‘manipulación’. Sin embargo, esta practicidad y simplicidad metodológica le ha quitado una ventaja potencial a la yupana, la posibilidad de calcular mentalmente, necesarios en grados superiores, que ofrece el método Radicati. Este último, debe promoverse en las escuelas, colegios y universidades, por tener la cualidad de desarrollar el pensamiento abstracto.

**De la manualidad a la digitalización.** La yupana ha sido explotada solo en sus cualidades básicas. De todos los modelos revisados, desde Chordeleg (Ecuador) hasta el de Callejón de Huaylas (Perú), el más experimentado y adaptado pedagógicamente es la yupana de Guamán Poma. Sin embargo, existe otras posibilidades de yupana por explorar, como el modelo del Callejón de Huaylas propuesta por Pinto Tapia (2010), la yupana fraccionaria, yupana decimal, cuyas eficacias en el aprendizaje de la matemática se deben investigar. La tecnología ha permitido el diseño de yupanas digitales, haciendo que lo ancestral se alíe a la tecnología contemporánea, ofreciendo soluciones didácticas. La yupana ha demostrado que tiene posibilidades de desarrollarse tecnológicamente y digitalmente a través de softwares, juegos, aplicaciones para PC, móvil y tabletas que de forma lúdica pueden ayudar en la educación matemática, cuyas bondades deben investigarse.

**Valor formativo - Inteligencia y valores.** Finalmente, la yupana es un material educativo autóctono e intercultural idóneo, no solo para la enseñanza (Guzmán, Huamaní, Moya, 2018), y el aprendizaje de la matemática, y un valioso aporte a la pedagogía (Mora y Valero, 2019), que se puede posicionar en el mundo; sino que se proyecta como un material educativo con potencial para educar más que enseñar matemática como dijera Bishop. No solo resulta beneficioso para el desarrollo de la inteligencia y el pensamiento matemático; además, como dijeran Vilca & Sosa (2020) y Vilca-Apaza et al. (2021), ayudan a formar a identidad y la dignidad. Es una posibilidad de investigación y de implementación en las instituciones de formación.

Estos estudios valen una interpelación a los Ministerios de Educación, como instituciones rectoras, y a los docentes a emplear la yupana para optimizar el aprendizaje de la matemática, especialmente la yupana abstracta en los grados superiores, más aún en el marco de los bajos niveles alcanzados en las evaluaciones PISA de la OCDE. Es necesario promover y masificar su uso, no solo en escuelas rurales y citadinas sino en las universidades en la formación de formadores, para promover competencias y actitudes interculturales, en América Latina. Como dijera Hernández (2004), el conocimiento del ábaco peruano en las escuelas, no solo enriquece la clase, sino que nos enriquecemos nosotros mismos.

## Referencias

- Acosta, José de. (1589[2008]). *Historia natural y moral de las Indias*. CSIC.
- Antúñez de Mayolo Rynning, S.E. (2003). Perfeccionamiento intelectual durante el Incanato (1025 – 1532). Impresiones Benito
- Apaza Luque, H.J. y Atrio Cerezo, S. (2016). Las cantidades en la Yupana desde una perspectiva cultural andina: una experiencia en aulas de primer y segundo grado de primaria. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 5(2), 36-49. <http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/view/3>
- Apaza Luque, H.J. (2017). La yupana, material manipulativo para la educación matemática. Justicia social y el cambio educativo en niños de las comunidades quechuas alto andinos del Perú. Tesis doctoral - Universidad Autónoma de Madrid. <https://repositorio.uam.es/handle/10486/680462>
- Arenas, G., & Pacca, M. (2013). La Yupana como material educativo en el aprendizaje de La adición de números naturales en alumnos. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional del Altiplano, Puno.
- Aroca Escobar, A.Y. y Lasso Avilés, K.Y. (2016). La Yupana como material didáctico en el desarrollo de operaciones básicas matemáticas en los grados segundo y tercero de educación básica primaria. Tesis pregrado – Universidad Surcolombiana. <https://biblioteca.usco.edu.co/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=44110>
- Basilio Santacruz, F., Javier Antonio, N.I. y Ortega Bautista, S.Z. (2018). La yupana y el aprendizaje de las operaciones básicas en Los estudiantes de la institución educativa Julio Armando Ruíz Vásquez, Amarilis – 2015. Tesis de licenciatura. Universidad Nacional Hermilio Valdizán. <http://repositorio.unheval.edu.pe/handle/UNHEVAL/3206>
- Bernedo Navarrete, G.M. (2018). Efecto del programa yupanamat en las operaciones aritméticas en estudiantes de primaria, Magdalena 2016. Tesis de maestría. Universidad César Vallejo. <https://repositorio.ucv.edu.pe/handle/20.500.12692/14689>
- Bertonio, L. (1984 [1612]). Vocabulario de la Lengua Aymara. IFEA facsimilar,
- Bishop, A.J. (1999). Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural. Temas de educación Paidós.
- Blanco-Álvarez, H., Fernández-Oliveras, A. y Oliveras, M.L. (2017). Formación de Profesores de Matemáticas desde la Etnomatemática: estado de desarrollo. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 31, n. 58, p. 564-589. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a02>
- Bousany, Y. (2008). YUPANCHIS La matemática inca y su incorporación a la clase. Independent Study Project (ISP) Collection. 1. [https://digitalcollections.sit.edu/isp\\_collection/1/](https://digitalcollections.sit.edu/isp_collection/1/)
- Burns Glynn, W. (1981). La Tabla de Cálculo de los Incas. BOLETIN DE LIMA. VOL. III, N° 11 - Marzo, 15 pp. Lima – PERÚ. <http://www.boletindelima.com/1981-11.htm>
- Bustos, C., Vergara, L.H. y Luque Arias, C.J. (s.f.). El ábaco inca y las operaciones aritméticas. Universidad Nacional de Pedagogía. 189-208. Colombia. <https://pdfslide.net/documents/anexo-abacoinca-yupana.pdf.html>

- Ccolque Cruz, V. y Suni Huilca, E.R. (2015). Didáctica de la yupana y niveles de logro de aprendizaje de números y operaciones con estudiantes del segundo grado de educación primaria en la I.E. N° 56128 de Susaya – Canas, 2015. Tesis de licenciatura. Universidad Nacional de San Antonio Abad de Cusco. <http://repositorio.unsaac.edu.pe/handle/UNSAAC/1476?show=full>
- Chambi, O. (2003). Sistemas contables en kipu y Yupana. En *M. N. Folklore, Reunión Anual de Etnología* (págs. 241-249). Museo Nacional de Etnografía y Folklore.
- Chirinos, A. (2010). *Quipus del Tahuantinsuyo. Curacas, Incas y su saber matemático en el siglo XVI*. Comentarios SAC.
- Choquehuanca Larico, G. (2010). Uso del ábaco andino en el aprendizaje de la adición en los educandos del III ciclo de la IEP Nro 72613 de Llacharapi - Arapa. Tesis segunda especialidad – UNA Puno. <http://repositorio.unap.edu.pe/bitstream/handle/UNAP/194/EPG414-00414-01.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Cinzia Florio, P. (2008). Encuentros y Desencuentros en la identificación de una relación matemática en la yupana de Guamán Poma de Ayala. Salerno 14-15. [https://www.academia.edu/3989534/Decifrata\\_la\\_yupana\\_di\\_Guaman\\_Poma\\_versione\\_in\\_spagnolo](https://www.academia.edu/3989534/Decifrata_la_yupana_di_Guaman_Poma_versione_in_spagnolo)
- De Acosta, J. (1590). Historia Natural y Moral de las Indias, 1590, Lib. VI, cap. VIII, p. 211). Sevilla, España. <http://www.biblioteca.org.ar/libros/71367.pdf>
- De Pasquale, N. (2001). Il Volo del Condor, “Pescara Informa”, Rivista dell’Ordine degli Ingegneri di Pescara. Ed. Sigraf, Pescara. Ottobre.
- Espitia Pinilla, S.E. (2018). Aportes de la yupana a la interpretación de la multiplicación. Tesis de maestría. Universidad Externado de Colombia. <https://bdigital.uexternado.edu.co/handle/001/1101>
- Fedriani Martel, E.M. y Tenorio Villalon, A. F. (2004). Los sistemas de numeración maya, azteca e inca. *Lecturas Matemáticas Volumen 25*, 159–190. [http://faces.unah.edu.hk/arqueo/images/stories/docs/Documentos\\_en\\_Linea/numeracion%20maya,%20azteca%20e%20inca.pdf](http://faces.unah.edu.hk/arqueo/images/stories/docs/Documentos_en_Linea/numeracion%20maya,%20azteca%20e%20inca.pdf)
- Fernández López, B. (2007). Sistematización de la experiencia de: la etnomatemática en procesos de alfabetización intercultural bilingüe: la yupana. Tesis de especialidad. Universidad Nacional del Altiplano. <http://repositorio.unap.edu.pe/bitstream/handle/UNAP/182/EPG399-00399-01.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Figuerola Fallas, E. y Mena Picado, H. (2020). Material: La yupana y el quipus como herramienta didáctica para el abordaje de las operaciones fundamentales. Ministerio de Educación Pública. <https://mep.go.cr/sites/default/files/page/adjuntos/yupana-quipu.pdf>
- Garcilaso de la Vega, I. (1959[1609]). *Comentarios Reales de los Incas*. Editorial UNMSM.
- Gómez Chaves, J.R. (2016). La yupana una estrategia pedagógica en primaria. Encuentro de experiencias significativas. Colombia. <http://funes.uniandes.edu.co/10295/1/Gom%C3%A9z2016La.pdf>
- Gonzales Arnao, W.H. (2015). Sistemas de cálculo de los Incas - Desarrollo del software y hardware para la aplicación a la enseñanza. *Apuntes Revista digital de arquitectura*. <http://apuntesdearquitecturadigital.blogspot.com/2015/12/sistemas-de-calculo-de-los-incas.html>
- González Holguín, D. (1952 [1608]). *Vocabulario de la lengua general de todo el Perú llamada lengua Quichua o del Inca*. Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
- Guamán Poma de Ayala, F. (1987 [1615]). *Primer nueva crónica y buen gobierno*. Historia 16.
- Guzmán Quiquia, L.E., Huamani Carbajal, V. y Moya Espinoza, N.G. (2018). La aplicación de la yupana y la taptana para favorecer la resolución de problemas de adición y sustracción en los estudiantes del 3er grado de educación primaria de la I.E.B. “comunidad Shipiba” del distrito del Rímac durante el año 2016. Tesis de licenciatura. Universidad de Ciencias y Humanidades. <https://repositorio.uch.edu.pe/handle/uch/209?show=full>
- Hernández García, C.A. (2004). Una Yupana dinámica para cada niño. *nodos y nudos/volumen 2 No. 17*, 7-80. <https://doi.org/10.17227/01224328.1234>
- Holguín Atehortúa, J.F. (2017). El sentido del número en la cultura inca a través de la lengua quechua. Tesis de maestría. Universidad Tecnológica De Pereira. <http://repositorio.utp.edu.co/dspace/handle/11059/8126>
- Huanca Yapuchura, O. y Payehuanca Apaza, S. (2007). Aplicación de la yupana para el desarrollo del pensamiento lógico matemático en niños y niñas de 5 años de la I.E.I. N° 224 San José de la ciudad de Puno. Tesis de licenciatura. Universidad Nacional del Altiplano.
- Leonard, M. y Shakiban, C. (2010). The Incan Abacus: A Curious Counting Device. *Journal of Mathematics and Culture*, 5 (2), 81-106. <https://journalofmathematicsandculture.files.wordpress.com/2016/05/incan-abacus-leonard-ll-final.pdf>
- Lina Nieto, N. (2009). Yupana. <https://es.slideshare.net/Gladystabares/aso-fresas-2458766>

- Malpartida Calero, J.J., Meramendi Salazar, L.L. y Meza Loreña, R.B. (2017). La yupana y el aprendizaje de la multiplicación de números Enteros en los alumnos del primer grado de educación Secundaria de la I. E. Illathupa – Huánuco – 2016. Tesis de licenciatura. Universidad Nacional Hermilio Valdizán. <http://repositorio.unheval.edu.pe/handle/UNHEVAL/2727>
- Mamani Vargas, M.P. (2010). Etnomatemática y el grado de razonamiento lógico matemático, en los estudiantes de educación primaria del Instituto Superior Pedagógico Público Juliaca, 2008. Tesis de maestría. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. <https://cybertesis.unmsm.edu.pe/handle/20.500.12672/2417>
- Martinez Avendaño, O.C. (2007). Las matemáticas precolombinas como recurso pedagógico. Tesis de licenciatura. Universidad Industrial de Santander Colombia. <https://docplayer.es/33680412-Las-matematicas-precolombinas-como-recurso-pedagogico.html>
- Mejía Quispe, J.J. (2011). Programa de operaciones aritméticas con base en la yupana en el cálculo aritmético en estudiantes de primero de secundaria del Callao. Tesis de maestría. Universidad San Ignacio de Loyola. <http://repositorio.usil.edu.pe/handle/123456789/1246>
- Micelli, M.L. y Crespo Crespo, C.R. (2012). Ábacos de América prehispánica. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 5(1). 159-190. <https://www.redalyc.org/pdf/2740/274021551007.pdf>
- Montalvo-Castro, J. (2014). Reciclaje digital educativo. Diseño de un videojuego a partir de la yupana o "ábaco de los Incas". II Conferencia Anual: Investigación para el Crecimiento y Desarrollo Inclusivo en el Perú, del Consorcio de Universidades. Universidad del Pacífico, Lima, Perú. [https://www.researchgate.net/publication/273782510\\_Reciclaje\\_digital\\_educativo\\_Disenio\\_de\\_un\\_videojuego\\_a\\_partir\\_de\\_la\\_yupana\\_o\\_abaco\\_de\\_los\\_Incas](https://www.researchgate.net/publication/273782510_Reciclaje_digital_educativo_Disenio_de_un_videojuego_a_partir_de_la_yupana_o_abaco_de_los_Incas)
- Montalvo-Castro, J. (2017). Modelo de interfaz narrativa para facilitar el razonamiento matemático infantil. *Digital Education Review* - Number 32. 22-34. [https://revistes.ub.edu/index.php/der/article/viewFile/17336/pdf\\_1](https://revistes.ub.edu/index.php/der/article/viewFile/17336/pdf_1)
- Mora, L.C. y Valero, N. (2019). La yupana como herramienta pedagógica en la primaria. Universidad pedagógica nacional. [https://cmascriptpublic2.ihmc.us/rid=1J2NH8QTM-2912G6-PZ5/yupana\\_como\\_herramienta\\_pedagogica.pdf](https://cmascriptpublic2.ihmc.us/rid=1J2NH8QTM-2912G6-PZ5/yupana_como_herramienta_pedagogica.pdf)
- Moscovich, V. (2006). Yupana, tabla de contar inca. Revista Andina, N° 43, 93-127. [https://www.academia.edu/1130617/Yupana\\_tabla\\_de\\_contar\\_inca](https://www.academia.edu/1130617/Yupana_tabla_de_contar_inca)
- Moscovich, V. (2007). Yupana, tabla de contar inca: Estructura interna. Revista Andina Artículos, notas y documentos, N° 44, 71-116. <http://revista.cbc.org.pe/index.php/revista-andina/article/view/349/330>
- Murillo Zambrana, J.D. (2010). Yupana Digital. La Paz, Bolivia. <https://es.scribd.com/doc/36501843/Yupana-Digital>
- Obeso Macassi, R.M. (2017). El uso de la yupana en el aprendizaje de las cuatro operaciones básicas en los alumnos del 3° grado de educación primaria de la I.E. 80 006 'Nuevo Perú' Urbanización Palermo – Trujillo-2015. Tesis de licenciatura. Universidad Nacional de Trujillo. <http://dspace.unitru.edu.pe/handle/UNITRU/7982?show=full>
- Oliveras, M.L.; Blanco-Álvarez, H. (2016). Integración de las Etnomatemáticas en el Aula de Matemáticas: posibilidades y limitaciones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 30, n. 55, 455-480. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a08>
- Orellana, E.A. (2005). Una contabilidad precolombina: la del imperio incaico. Universidad de Buenos Aires. [http://bibliotecadigital.econ.uba.ar/download/cya/cya\\_v11\\_n22\\_05.pdf](http://bibliotecadigital.econ.uba.ar/download/cya/cya_v11_n22_05.pdf)
- Ortega, M., y Guzmán, V. (2003). La yupana como recurso didáctico, en los alumnos del 2do grado de la IEP N° 71013 Glorioso San Carlos. (*Tesis de Licenciatura*). Universidad Nacional del Altiplano, Puno.
- Pachas De La Colina, C.E. (2016). Jugando aprendemos a sumar y restar con la yupana. 1ra edición. Perú: Hecho por Computadora <http://repositorio.cultura.gob.pe/handle/CULTURA/355>
- Pacheco Rios, O. (1999). Del Quipu a la yupana: el computador ancestral. Serie Etnogeometría para la etnomatemática N° 2. Bolivia: Editorial Cepdi. <https://www.andesacd.org/wp-content/uploads/2019/02/Del-Quipu-Incaico-a-la-Yupana.pdf>
- Palli Salas, A.B. (2015). Yupana fraccionaria. <https://es.slideshare.net/JinTekken007/yupana-fraccionaria-pdf>
- Paraguay Morales, M., Paraguay Macuri, M. y Paraguay Macuri, C. (2021). Relación entre Yupana y el aprendizaje de la multiplicación de números integrales. *Revista Meta: Rating*, 13 (38), 81 - 100. <http://dx.doi.org/10.22347/2175-2753v13i38.2956>
- Pardo Gómez, J. (2018). Aplicación de la yupana como estrategia etnomatemática para la construcción del número en niños del primer y segundo grado de la Institución Educativa N° 54163 del distrito de San Jerónimo – 2017. Tesis de maestría. Universidad Nacional Del Altiplano. <http://repositorio.unap.edu.pe/handle/UNAP/9530>



- Pareja, D. (1986). Instrumentos prehispánicos de cálculo: el quipu y la yupana. *Revista Integración* 4 (1), 37-52. <http://matematicas.uis.edu.co/~integracion/rint.html/volumen/vol4%281%291986/vol4i86-art3.pdf>
- Pinto Tapia, M.A. (2010). Guía de uso de la calculadora y yupana inka en la enseñanza de la matemática. <https://es.slideshare.net/mpinto/uso-de-la-calculadora-y-yupana-innka-miguel-angel-pinto-tapia>
- Quispe, A., y Mamani, R. (2012). La Yupana como material educativo para el aprendizaje de la multiplicación de las niñas y niños del 2° grado I.E.P. N° 70718 Villa del Lago. (*Tesis de Maestría*). Universidad Nacional del Altiplano, Puno.
- Radicati di Primeglio, C. (1979). *El sistema contable de los Incas: yupana y quipu*. Librería Studium S.A.
- Radicati di Primeglio, C. (1951). *Introducción al estudio de los quipus- El sistema contable de los Incas*". Librería Studium,
- Ramón, J.A. y Vilchez, J. (2019). Tecnología Étnico-Digital: Recursos Didácticos Convergentes en el Desarrollo de Competencias Matemáticas en los Estudiantes de Zona Rural. *Información tecnológica*, 30(3), 257-268. <https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642019000300257>
- Real Academia Española (2021). Diccionario de la lengua española. <https://dle.rae.es/%C3%A1baco?m=form>
- Ríos Mencia, J. (2013). Las Matemáticas ancestrales y la Yupana. *Revista Tarea*, 82, 41-47. [http://tarea.org.pe/images/Tarea82\\_41\\_Jesus\\_Rios.pdf](http://tarea.org.pe/images/Tarea82_41_Jesus_Rios.pdf)
- Rojas-Gamarra, M., y Stepanova, M. (2015). Sistema de numeración Inka en la Yupana y el Khipu. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*. 8(3), 46-68. <https://www.redalyc.org/pdf/2740/274041587004.pdf>
- Roncoroni Osio, U., Lavín, E. y Bailón Maxi, J. (2020). Pensa-miento computacional. *Alfabetización digital sin computadoras*, Icono 14, 18 (2), 379-405. doi: 10.7195/ri14.v18i2.1570 <https://icono14.net/ojs/index.php/icono14/article/view/1570/1735>
- Saldívar Olazo, C.G., Saldívar Olazo, A.J. y Goycochea Olazo, D. (2019). Tawa Pukllay - la aritmética inca de reconocimiento de formas y movimientos operable en paralelo y que no requiere cálculos numéricos mentales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 23(1), 353-363. <http://funes.uniandes.edu.co/14022/1/Saldívar2019Tawa.pdf>
- Schroeder, J. (2000). El universo de los números. Ministerio de Educación.
- Seráfico Narciso, N. (2013). La operativización de la adición de Números naturales en los niños del 1° Grado de primaria cuyos docentes Aplican la yupana como material Educativo en la I. E. "Fe y Alegría" N°53, Huaycán y cuyos docentes que no Aplican la yupana como material Educativo en la I.E. N° 2073 "José Olaya Balandra", S.M.P. Lima.2013. Tesis de licenciatura. Universidad César Vallejo. <https://repositorio.ucv.edu.pe/handle/20.500.12692/9414>
- Tord, M.H. (17 de febrero de 2019). La yupana: El ábaco inca. Blog El Comercio. <https://elcomercio.pe/eldominical/yupana-abaco-inca-noticia-608095-noticia/>
- Tun, M., y Díaz Sotelo, M.A. (2015). Recuperar la Memoria Histórica y las Matemáticas Andinas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 8(1), 67-86. <https://pdfs.semanticscholar.org/739d/2e018f7c06560ee9645e5eff184dc819ec4b.pdf>
- Urbizagástegui Alvarado, R. (2014). La escritura inca: quipues, yupanas y tocapus. [https://www.academia.edu/44538397/La\\_Escritura\\_Inca\\_Quipus\\_Yupanas\\_y\\_Tocapus](https://www.academia.edu/44538397/La_Escritura_Inca_Quipus_Yupanas_y_Tocapus)
- Valera, B. (2009 [1618]). Exsul Immeritus Blas Valera Populo Suo. En L.Laurencich-Minelli y B. Valera (Eds.), *Nativos, jesuitas y españoles endos documentos secretos del siglo XVI* (pp. 130-243). Chachapoyas: Municipalidad Provincial de Chachapoyas.
- Varallanos, J. (1943). El derecho inca según Felipe Guamán Poma de Ayala. Tipografía Santa Rosa.
- Velasco, Padre Juan de, "*Historia del Reino de Quito*". 1841-1844, Quito 1989.
- Vilca Apaza, H.M., Yapuchura Saico, C. R., Mamani Apaza, W.W. y Sardón Ari, D.L. (2018). Maestros indigenistas y sus experiencias socio-educativas en el altiplano peruano en el siglo XX. *Comuni@cción*, 9(2), 90-100. [http://www.scielo.org.pe/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S2219-71682018000200002&lng=es&tlng=es](http://www.scielo.org.pe/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2219-71682018000200002&lng=es&tlng=es).
- Vilca Apaza, H.M.; Sosa Gutiérrez, F. y Vásquez Machicao, L. (2020). El valor de la formación en etnomatemática aimara para docentes en Puno, Perú. Colombia: Instituto Latinoamericano de Altos Estudios. <https://www.ilae.edu.co/web/libros-html/libro-624/index.html?page=2>
- Vilca-Apaza, H.M., Mamani Apaza, W.W., Maraza Vilcanqui, B., y Bizarro Flores, W.H. (2023). Yupana o ábaco inca, a 100 años (1912-2022): experiencias y posibilidades de educación matemática en América Latina. *Comuni@cción: Revista De Investigación En Comunicación y Desarrollo*, 14(1), 86-102. <https://doi.org/10.33595/2226-1478.14.1.804>
- Vilca-Apaza, H.M., Bermejo-Paredes, S. y Sardón Ari, D. L. (2021). Los Sistemas de Numeración Aymara: cambios y Valor Formativo. *Bolema: Boletim De Educação Matemática*, 35(71), 1701-1722.

- <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a22>
- Vilchez Chumacero, R. (2014). La enseñanza de la matemática usando la yupana. *BIG BANG FAUSTINIANO*, 3(3), 3-6.  
<https://revistas.unjfsc.edu.pe/index.php/BIGBANG/article/view/236/234>
- Vilchez Chumacero, R. (2013). Utilización de la yupana como material didáctico en la enseñanza de matemática en alumnos segundo grado de primaria en instituciones educativas de huacho en el período 2012. (Tesis doctoral, Universidad nacional José Faustino Sánchez Carrión, Huacho, Perú). <https://revistas.unjfsc.edu.pe/index.php/BIGBANG/article/view/236>
- Villavicencio, M. (1983). Numeración, algoritmos y aplicación de relaciones numéricas y geométricas en las comunidades rurales de Puno. Ministerio de Educación INIDE.DDE.
- Wassén, H. (1931). The Ancient Peruvian Abacus. Editado por E. Nordenskiöld (ed.). *Comparative ethnological studies*, vol. 9. Gotemburgo, pp. 189-205.
- Yon Delgado, J.C. y Muenza Valles, L.A.(2021). Aplicación del material didáctico “YUPANA” para el desarrollo de capacidades matemáticas en niños y niñas de cinco años de la Institución Educativa Inicial N° 628 Villa Primavera, Ucayali 2019. *Innova Shinambo*, [S.l.], v. 2, n. 2, p. 50-60.  
<http://revista.unia.edu.pe/index.php/EDUCACION/article/view/40>
- Zeballos Quea, R. (2019). El uso de estrategias y procedimientos de estimación y cálculo en la resolución de problemas de cantidad con el material didáctico yupana en niños y niñas del 3er grado de nivel primaria. Tesis licenciatura. Universidad Peruana Cayetano Heredia.  
[http://repositorio.upch.edu.pe/bitstream/handle/upch/7778/Uso\\_ZeballosQuea\\_Rosalia.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://repositorio.upch.edu.pe/bitstream/handle/upch/7778/Uso_ZeballosQuea_Rosalia.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Zevallos Mamani, R.J.S. (2019). La Yupana en el aprendizaje de la matemática. Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle. Tesis de licenciatura.  
<https://repositorio.une.edu.pe/handle/UNE/4038>